

## CHAPITRE XXII : COMPOSITES (TD)

N. BILLON

Un matériau composite est composé de plusieurs composants élémentaires dont l'association lui confère des propriétés qu'aucun des composants, pris seul, ne possède.

Ainsi une résine chargée de fibres de carbone possède une résistance à la traction plus importante que la résine seule. A contrario, les fibres seules n'auraient pas de cohésion entre elles, par exemple un bloc de graphite présenterait un mauvais comportement en traction ou en cisaillement. On distinguera ici deux types de composites :

- les matériaux à fibres continues ou laminés ;
- les matériaux à phases dispersées (fibres discontinues ou charges, de nature minérale ou organique, dispersées dans une matrice).

L'approche du comportement de tout composite peut se faire à deux niveaux :

- la *macromécanique* qui assimile le composite (ou un de ses éléments comme le pli du stratifié) à un *matériau homogène équivalent* et représente ses propriétés par des grandeurs effectives comme, par exemple, les constantes élastiques de l'ingénieur que sont les modules et coefficients de Poisson ;
- la *micromécanique* qui développe des solutions pour *estimer les grandeurs effectives* précédentes à partir des propriétés des composants, de la taille, de la forme de la fraction volumique et de l'arrangement des renforts.

Nous illustrerons tous ces aspects dans la suite de l'exercice.

### 1 MACROMECHANIQUE ET ANISOTROPIE

1.1 Les matériaux composites sont très souvent macroscopiquement anisotropes. D'où provient cette anisotropie ?

1.2 La Figure 1 présente quelques types d'organisation de fibres discontinues et continues dans une matrice supposée isotrope.

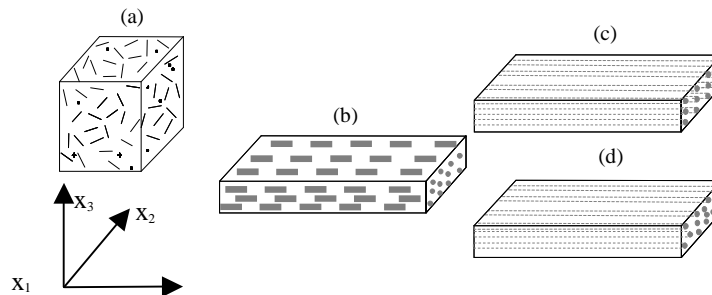


Figure 1 : Différents types de composites à fibres courtes (a et b) et continues (c et d) ; (a) orientation aléatoire en 3D ; (b) et (d) orientation 1D et arrangement aléatoire dans le plan ( $x_2$ ,  $x_3$ ) ; (c) orientation 1D et arrangement en réseau dans le plan ( $x_2$ ,  $x_3$ )

Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire combien de coefficients faut-il pour caractériser le comportement macroscopique de ces matériaux ? On trouvera quelques rappels mécaniques en fin d'énoncé.

1.3 Donnez un exemple de jeu de coefficients mesurables pour les matériaux (a) et (d).

1.4 La plupart du temps ces composites sont utilisés sous forme de plis minces superposés. Il est intéressant de connaître le comportement de ces plis qui sont alors des corps orthotropes minces. Dans ce cas la complaisance

du milieu est réduite à 4 coefficients. Dans un système d'axes où les fibres sont parallèles à l'axe  $x_1$  et l'épaisseur à l'axe  $x_3$  on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad [9]$$

Avec  $J_{21} = J_{12}$ . Par contre, dans un système d'axes  $x'_1ox'_2$ , faisant un angle  $\theta$  avec le précédent, on peut démontrer que  $J'$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{26} \\ T_{61} & T_{62} & T_{66} \end{bmatrix} \quad [10]$$

Tous les paramètres de  $J'$  dépendent des paramètres de  $J$  et de l'angle  $\theta$ . On note que  $T_{16}$ ,  $T_{26}$ ,  $T_{61}$  et  $T_{62}$  ne sont nuls que pour des angles de 0 et 90 °C.

**1.4.1** Qu'implique ceci dans le cas d'une sollicitation uniaxiale parallèle à un des axes  $x'_1$  ou  $x'_2$  ?

**1.4.2** Quelle précaution sur la superposition des plis permet d'éviter que ce problème persiste sur le composite ?

## 2 MICROMECHANIQUE

### 2.1 COMPOSITES A FIBRES CONTINUES

**2.1.1** Soit un composite représenté sur la Figure 2. Appelons  $E_f$  le module des fibres et  $E_m$  celui de la matrice. Soit, de plus,  $\phi_f$  la fraction de volume de fibres.

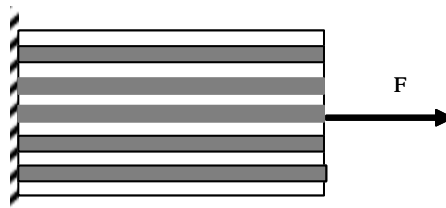


Figure 2 : Composite à fibres continues unidirectionnel mince ; en gris les fibres, en blanc la matrice

Donnez une estimation des deux modules, longitudinal et transverse, du composite.

**2.1.2** Les deux bornes calculées sont les bornes de Kelvin-Voigt et Reuss. Elles encadrent généralement la réalité.

- En réfléchissant sur la déformation de la matrice expliquez qualitativement pourquoi les modules transverses réels sont supérieurs à la borne de Reuss.
- Quelle conclusion générale sur les modèles de comportement doit-on en tirer ?

### 2.2 COMPOSITES A FIBRES DISCONTINUES

Pour identifier les grandeurs physiques qui régissent le comportement d'un composite à fibres discontinues, nous allons illustrer le calcul du module longitudinal du composite unidirectionnel régulier représenté sur la Figure 1b

étant connus le module de la matrice,  $E_m$ , celui de la fibre,  $E_f$ , les dimensions  $l$  et  $d_f$  de celle-ci ainsi que sa fraction volumique,  $\phi_f$ . On admettra, pour cela, avec Bourban et coll. (voir Références), l'élément de volume représentatif donné sur la Figure 3.

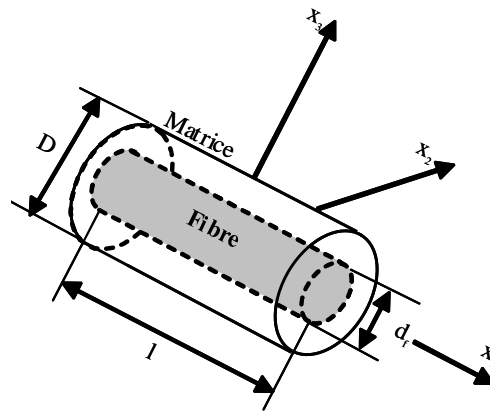


Figure 3 : Elément de volume représentatif du composite unidirectionnel à fibres discontinues (d'après Bourban et coll., voir Références)

**2.2.1** Quelle est la contrainte dans la fibre (on négligera les interactions aux extrémités des fibres) ?

**2.2.2** Quel est le rôle de l'interface sur le transfert des contraintes de la matrice aux fibres ?

**2.2.3** Pour aller plus loin il faut donner l'expression de la contrainte interfaciale de cisaillement en fonction de  $x_1$ . Admettons, dans un premier temps, que celle-ci est constante ( $\tau = \tau_y$ ) [Kelly et coll.]. Tracer schématiquement le profil des contraintes le long de la fibre. Où trouve-t-on la contrainte axiale maximale dans la fibre,  $\sigma_{\max}$  ?

**2.2.4** Quelle est la longueur de fibre optimale si on admet que pour utiliser effectivement les fibres courtes le transfert des contraintes doit être tel que  $\sigma_{\max}$  approche la contrainte à rupture de la fibre,  $\sigma_{\text{ult}}$  ?

**2.2.5** Comment peut-on compenser une faible contrainte interfaciale ?

**2.2.6** Le modèle précédent reste trop simple. Cox (voir Références) suggère, quant à lui, que la contrainte interfaciale doit être proportionnelle à la différence entre le déplacement d'un point le long de la fibre,  $u_f$ , et le déplacement de ce même point si l'élément de volume était entièrement fait de matrice,  $u_m$ . Soit :

$$\tau = c(u_f - u_m) \quad [11]$$

Au terme du calcul, le module  $E_1$  de l'élément de la Figure 3 serait :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_f \phi_f \left[ 1 - \frac{\tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\frac{\beta l}{2}} \right] + E_m (1 - \phi_f) \\ \beta = \sqrt{\frac{4c}{d_f E_f}} \end{array} \right. \quad [12]$$

Que représente le terme entre crochets dans l'expression de  $E_1$  ?

**2.2.7** Le modèle ci-dessous surestime les modules expérimentaux. Hwang et Gibson (voir Références) corrigent l'élément de volume représentatif de la Figure 3 par celui de la Figure 4.

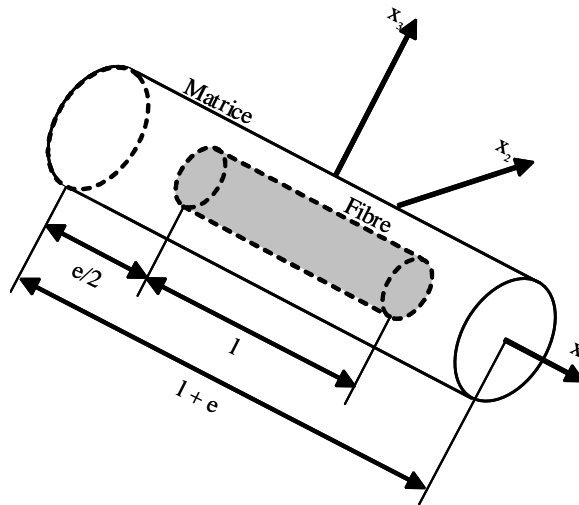


Figure 4 : Élément de volume représentatif du composite unidirectionnel à fibres discontinues corrigé (d'après Hwang et Gibson, voir Références)

- Donner une expression possible de son module,  $E_c$ , et tracer la forme son évolution avec le rapport de forme ( $l/d_f$ ) de la fibre.
- Quels sont les paramètres, décrivant le composite, intervenant dans l'expression de son module ?

**2.2.8** Quel(s) paramètre(s) faudrait-il ajouter si le composite n'était plus unidirectionnel ?

### 2.3 COMPOSITES A PHASES DISPERSÉES

Nous avons mis en évidence un couplage fibre matrice dans le cas précédent. Nous allons maintenant réfléchir au cas d'un composite fait de la dispersion de sphères élastiques dans un milieu élastique. Goodier a traité le cas d'une inclusion sphérique isolée et de rayon  $R$  soumise à une contrainte uni-axiale,  $T$ . Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de l'inclusion sont, respectivement,  $G_i$  et  $\nu_i$ . La matrice contenant l'inclusion est caractérisée par un module de cisaillement  $G_m$  et par un coefficient de Poisson  $\nu_m$ . Hors de l'inclusion ( $r > R$ , Figure 5) le calcul, dans un système de coordonnées sphériques, mène à :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G_m \left[ \frac{2A}{r^3} - \frac{2\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{C}{r^3} + 12 \frac{B}{r^5} + \left( 36 \frac{B}{r^5} - \frac{2(5-\nu_m)}{1-2\nu_m} \frac{C}{r^3} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G_m \left[ -\frac{A}{r^3} - \frac{2\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{C}{r^3} + 3 \frac{B}{r^5} + \left( \frac{C}{r^3} - 21 \frac{B}{r^5} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2G_m \left[ -\frac{A}{r^3} - \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} \frac{C}{r^3} - 9 \frac{B}{r^5} + \left( 3 \frac{C}{r^3} - 15 \frac{B}{r^5} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_{r\theta} &= 2G_m \left[ \frac{2(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} \frac{C}{r^3} + 24 \frac{B}{r^5} \right] \sin(2\theta) \end{aligned} \quad [13]$$

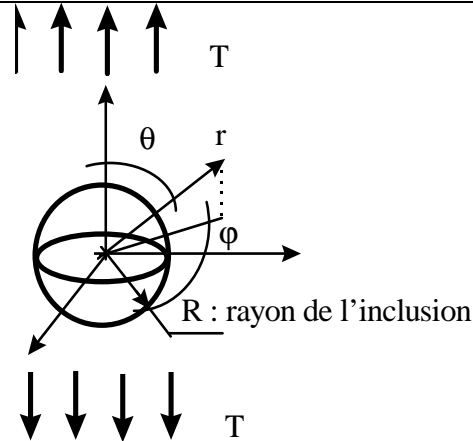


Figure 5 : Inclusion sphérique soumise à une traction uniaxiale

En écrivant la continuité des vecteurs contrainte ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{r\phi}$ ) et déplacement ( $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\phi$ ) s'exerçant à l'interface, il est possible de déterminer les constantes A, B et C :

$$\frac{A}{R^3} = \frac{T}{4G_m} \left\{ \frac{\left[ (1-\nu_m) \left( \frac{1+\nu_i}{1+\nu_m} \right) - \nu_i \right] G_i - (1-2\nu_i) G_m}{2(1-2\nu_i) G_m + (1+\nu_i) G_i} \right\} - \frac{TD \left[ 2(1-2\nu_m)(6-5\nu_m) G_i - (1-2\nu_m) G_m \right]}{2(1-2\nu_m) G_m + (1+\nu_m) G_i}$$

$$B = TR^5 D$$

$$C = 5TR^3 D(1-2\nu_m)$$

$$D = \frac{G_m - G_i}{8G_m \left[ (7-5\nu_m) G_m + (8-10\nu_m) G_i \right]}$$
[14]

On rappelle, par ailleurs, que le champ de contraintes hors présence de la sphère serait :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{T}{2}(1 + \cos(2\theta)) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{T}{2}\sin(2\theta) \end{cases}$$
[15]

- Que peut-on dire de l'effet de la particule sur la matrice ?
- De quoi dépend la contrainte vue localement par la matrice ?

#### RAPPELS ; ÉLASTICITÉ D'UN MATERIAU ANISOTROPE

Si  $\sigma$  est le tenseur contrainte et  $\varepsilon$  le tenseur déformation le comportement du matériau homogène équivalent, supposé élastique linéaire, est donné par les éléments du tenseur des modules  $\mathbf{M}$  ou du tenseur des complaisances  $\mathbf{J}$  :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad [1]$$

**M** et **J** sont des tenseurs d'ordre quatre et mettent donc en jeu 81 composantes. Cependant, les symétries propres aux contraintes et aux déformations réduisent ce nombre à 36 composantes différentes puisque dès lors (équation [1]) :

$$\begin{cases} M_{ijkl} = M_{ijlk} = M_{jikl} = M_{jilk} \\ J_{ijkl} = J_{ijlk} = J_{jikl} = J_{jilk} \end{cases} \quad [2]$$

Les matrices d'ordre quatre se réduisent alors à des matrices 6 x 6 en utilisant une notation réduite (Tableau 1, équation 3) :

$$\begin{cases} \sigma_i = M_{ij} \varepsilon_j \\ \varepsilon_i = J_{ij} \sigma_j \end{cases} \quad [3]$$

TABLEAU 1 : NOTATION CONTRACTEE DES TENSEURS DE CONTRAINTES ET DE DEFORMATIONS

<i>Contrainte</i>	<i>Déformation</i>	<i>Notation réduite</i>	
$\sigma_{ij}$	$\varepsilon_{ij}$	$\sigma_k$	$\varepsilon_k$
$\sigma_{11}$	$\varepsilon_{11}$	$\sigma_1$	$\varepsilon_1$
$\sigma_{22}$	$\varepsilon_{22}$	$\sigma_2$	$\varepsilon_2$
$\sigma_{33}$	$\varepsilon_{33}$	$\sigma_3$	$\varepsilon_3$
$\sigma_{23}$	$\gamma_{23}=2\varepsilon_{23}$	$\sigma_4$	$\varepsilon_4$
$\sigma_{13}$	$\gamma_{13}=2\varepsilon_{13}$	$\sigma_5$	$\varepsilon_5$
$\sigma_{12}$	$\gamma_{12}=2\varepsilon_{12}$	$\sigma_6$	$\varepsilon_6$

Une simplification supplémentaire peut être faite en considérant l'énergie élastique contenue dans un élément de matériau déformé (densité d'énergie de déformation ou de contrainte) :

$$\begin{cases} dU = \sigma_i d\varepsilon_i \\ dU' = \varepsilon_i d\sigma_i \end{cases} \quad [4]$$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases} \sigma_i = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i} \\ \sigma_j = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_j} \\ \varepsilon_i = \frac{\partial U'}{\partial \sigma_i} \\ \varepsilon_j = \frac{\partial U'}{\partial \sigma_j} \end{cases} (i \neq j) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial \sigma_j}{\partial \varepsilon_i} \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \sigma_i} \end{cases} \quad [5]$$

**M** et **J** sont donc symétriques et :

$$\begin{cases} M_{ij} = M_{ji} \\ J_{ij} = J_{ji} \end{cases} \quad [6]$$

En conclusion et en toute généralité, 21 coefficients indépendants sont nécessaires à la description du comportement élastique d'un matériau anisotrope.

Cependant, un matériau possède souvent une symétrie induite par sa microstructure interne. Ces symétries permettent de réduire encore le nombre de paramètres nécessaires à sa caractérisation. Ainsi, si le matériau est élastiquement orthotrope, c'est-à-dire s'il possède trois plans de symétrie perpendiculaires (parallèle à chacun des axes du repère,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ ), neuf paramètres non nuls subsistent :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad [7]$$

Dans le cas particulier du matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse tel que le plan ( $x_2$ ,  $x_3$ ) est isotrope par exemple 5 paramètres suffisent :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M_{22} - M_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad [8]$$

Enfin, si le matériau est isotrope, 2 coefficients caractérisent entièrement le comportement élastique du matériau.

## REFERENCES ET LECTURES COMPLEMENTAIRES

**P.-E. Bourban, L. Carisson, J.-P. Mercier, J.-A. Manson**, « *Traité des matériaux* », Presses Polytechniques et Universitaires Romandes Eds., Lausanne, vol. 15 : « *Matériaux composites à matrice organique; Constituants, procédés, propriétés* » (2004), pp. 82-104

**H.L. Cox**, *British Journal of Applied Physics* 3 (1952) 72-79

**J.N. Goodier**, *Journal of Applied Mechanics* 55 (1933) 39-44

**S.J. Hwang, R.F. Gibson**, *Journal of Engineering Materials and Technology* 109 (1987) 47-52

**A. Kelly, W.R. Tyson**, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 329-350





## CHAPITRE XXII : COMPOSITES (CORRIGE)

N. BILLON

### 1 MACROMECHANIQUE ET ANISOTROPIE

1.1 L'anisotropie résulte de l'arrangement spatial des renforts et du fait que renforts et matrice n'ont pas les mêmes propriétés. Même si les propriétés du renfort et de la matrice sont isotropes le composite peut être anisotrope.

1.2 Le matériau (a) peut être imaginé isotrope à l'échelle macroscopique car aucune direction particulière n'existe, deux paramètres suffisent.

Les matériaux (b) et (d) sont isotropes transverses ou orthotropes de révolution. La direction parallèle aux fibres est singulière le plan perpendiculaire est isotrope. 5 paramètres sont nécessaires.

Le matériau (c) n'est, quant à lui, qu'orthotrope. Il possède trois plans de symétrie distincts parallèles aux axes. Il nécessite 9 paramètres.

1.3 Pour caractériser le matériau il faudra appliquer un champ de contrainte (resp. de déformation) simple, i.e. tel qu'une seule composante soit non nulle, et mesurer les déformations (resp. les contraintes) résultantes pour identifier les composantes du tenseur  $\mathbf{J}$  (resp.  $\mathbf{M}$ ).

Pour le matériau (a), isotrope, une contrainte uni-axiale dans une direction quelconque permet de remonter au module d'élasticité, en mesurant la déformation dans le sens de la sollicitation, et au coefficient de Poisson, en mesurant la déformation dans une quelconque direction perpendiculaire. L'alternative à la mesure du coefficient de Poisson, toujours délicate, est la mesure d'un module de cisaillement dans un plan quelconque.

Pour le matériau (d) dont le comportement est décrit par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{13} & J_{13} & 0 & 0 & 0 \\ J_{13} & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 & 0 \\ J_{13} & J_{23} & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_{22} - J_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad [1]$$

Deux tractions uni-axiales, une parallèle et une perpendiculaire aux fibres, et les mesures des déformations axiales associées donnent accès à  $J_{11}$  et  $J_{22}$  qui sont par définition les inverses du module longitudinal,  $E_1$ , et du module transverse,  $E_2$ . Les mesures des déformations transverses associées à ces tractions (i.e.,  $\varepsilon_2$  pour une traction parallèle à  $x_1$  et  $\varepsilon_3$  pour une traction parallèle à  $x_2$ ) donnent accès à  $J_{13}$  et  $J_{23}$ . L'usage est de faire apparaître les coefficients de Poisson lors d'une sollicitation uni-axiale suivant la direction  $i$  :

$$\nu_{ij} = \frac{-\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (i \neq j) \quad [2]$$

Un module de cisaillement,  $G_{12}$  complètera la caractérisation. Au bilan :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{avec } J_{44} = 2(J_{22} - J_{23}) \quad [3]$$

**1.4.1** Le glissement n'est plus nul pour une contrainte uni-axiale. Ainsi une barre encastree soumise à une traction fléchirait. Il y a donc un couplage entre la déformation en cisaillement et la déformation normale. On peut dans certains cas observer des torsions sous traction.

**1.4.2** On peut alterner les orientations des plis pour réaliser un composite quasi isotrope.

## 2 MICROMECHANIQUE

### 2.1 COMPOSITES A FIBRES CONTINUES

#### 2.1.1

- Module longitudinal,  $E_{cl}$

Admettons que fibres, matrice et composite se déforment de la même façon, soit :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c \quad [4]$$

Chaque phase est le siège d'une contrainte image de son module :

$$\begin{cases} \sigma_f = E_f \varepsilon_f \\ \sigma_m = E_m \varepsilon_m \end{cases} \quad [5]$$

La contrainte moyenne dans le composite est alors :

$$\sigma_c = \phi_f \sigma_f + (1 - \phi_f) \sigma_m = E_{cl} \varepsilon_c \quad [6]$$

Des équations 5 et 6 on déduit que :

$$E_{cl} = \phi_f E_f + (1 - \phi_f) E_m \quad [7]$$

C'est la borne de Kelvin-Voigt.

- Module transverse,  $E_{cT}$

Admettons que la contrainte est homogène dans le composite :

$$\begin{cases} \sigma_f = \sigma_m = \sigma_c \\ \varepsilon_c = \phi_f \varepsilon_f + (1 - \phi_f) \varepsilon_m \end{cases} \quad [8]$$

Des équations 5 et 8 on déduit que :

$$\frac{1}{E_{cT}} = \frac{\phi_f}{E_f} + \frac{(1-\phi_f)}{E_m} \quad [9]$$

C'est la borne de Reuss.

### 2.1.2

- Si on avait sollicité la matrice seule avec la même contrainte, sa déformation axiale aurait été plus élevée et accompagnée d'une contraction latérale. Dans le composite ce rétreint est bloqué par les fibres. La matrice s'allonge donc moins et son module semble plus élevé. En fait, il y a un couplage entre la déformation des différents éléments du composite.
- Un modèle complet doit prendre en compte les effets de couplage.

## 2.2 COMPOSITES A FIBRES DISCONTINUES

**2.2.1** Pour calculer la contrainte dans la fibre nous allons décrire l'équilibre des forces agissant sur un tronçon de fibre situé à  $x_1$  de l'extrémité de la fibre et de longueur  $dx_1$  (Figure 1).

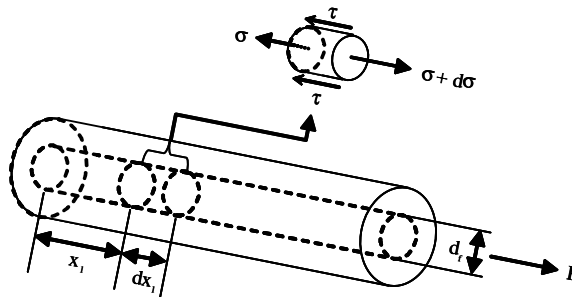


Figure 1 : Elément de volume représentatif du composite unidirectionnelle à fibres discontinues ; Définition des paramètres

La contrainte axiale,  $\sigma$ , est équilibrée par la contraintes interfaciale de cisaillement,  $\tau$  :

$$\left[ \sigma(x_1 + dx_1) - \sigma(x_1) \right] \frac{\pi d_f^2}{4} = \pi d_f dx_1 \tau \quad [10]$$

Après passage à la limite :

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4\tau}{d_f} \quad [11]$$

En supposant que la contrainte axiale est négligeable en extrémités des fibres ( $x_1=0$  et  $x_1=l$ ) :

$$\sigma(x_1) = \frac{4}{d_f} \int_0^{x_1} \tau dx_1 \quad [12]$$

**2.2.2** La contrainte dans la fibre est donc pilotée par la contrainte de cisaillement à l'interface. Celle-ci résulte de l'adhésion entre la fibre et la matrice et des différences de propriétés élastiques entre les deux matériaux.

**2.2.3** Puisque la contrainte dans la fibre est nulle aux deux extrémités, les contraintes sont symétriques autour de  $l/2$  (Figure 2). L'équation 12 conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x_1) = \frac{4}{d_f} \tau_y x_1 \\ \sigma_{\max} = \frac{2 \tau_y l}{d_f} \end{array} \right. \quad [13]$$

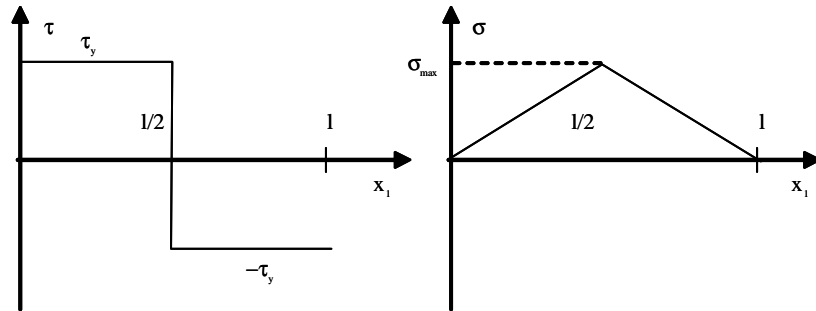


Figure 2 : Distribution des contraintes le long de la fibre, d'après Kelly et Tyson (voir Références)

**2.2.4** La longueur critique de la fibre est donnée par  $l_c$ , en substituant  $\sigma_{ult}$  à  $\sigma_{\max}$ :

$$\frac{l_c}{d_f} = \frac{\sigma_{ult}}{2 \tau_y} \quad [14]$$

**2.2.5** Des fibres à fort rapport  $l/d_f$  sont nécessaires pour provoquer la rupture d'un composite à fibres discontinues de haute résistance ultime ou de faible résistance interfaciale.

**2.2.6** Le terme entre crochet représente l'effet de la longueur finie des fibres sur la borne de Kelvin-Voigt qui apparaît ici comme un majorant du module longitudinal.

**2.2.7** On peut imaginer que la matrice en extrémités des fibres fonctionne en série avec le modèle précédent et donc (Figure 3):

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_l(1+e)} + \frac{e}{E_m(1+e)} \quad [15]$$

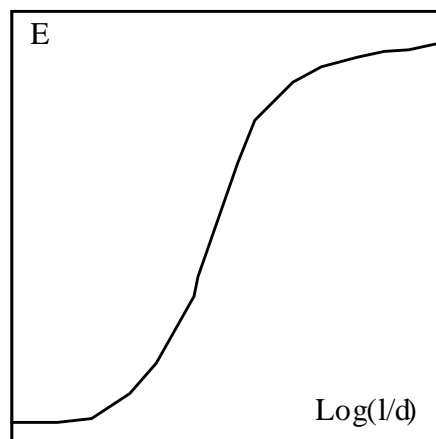


Figure 3 : Schémas de principe de l'évolution du module en fonction du rapport de forme de la fibre

Au bilan interviennent :

- les propriétés élastiques de chacune des phases ;
- la fraction volumique de fibres ;

- la distance entre fibres ;
- le rapport de forme de la fibre ;
- l'interface via la contrainte interfaciale.

**2.2.8** Pour un composite quelconque il faut avoir des renseignements supplémentaires sur l'orientation et l'organisation des fibres.

### 2.3 COMPOSITES A PHASES DISPERSEES

- Les particules redistribuent les contraintes. Ainsi la matrice ne voit plus la contrainte appliquée à l'infini.
- La contrainte effectivement ressentie dépendra des propriétés relatives des deux matériaux, de  $r/R$ , c'est-à-dire la distance à la particule, et de l'angle  $\theta$ .
- NB : En redistribuant les contraintes, les particules peuvent modifier les niveaux et localisations des maxima de pression hydrostatique et des contraintes de von Mises. Elles peuvent donc favoriser ou inhiber l'un ou l'autre des processus. Ceci conduira à un renforcement au choc si on favorise le cisaillement sur une matrice qui est très sensible au craquelage ou à une fragilisation si on favorise les craquelures sur un polymère plutôt sensible au cisaillement.

### REFERENCES ET LECTURES COMPLEMENTAIRES

A. Kelly, W.R. Tyson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 13 (1965) 329-350