Theoremes de l'energie et encadrement de la solution d'un probleme d'elasticite

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Mines ParisTech /CNRS
BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@ensmp.fr

Outline

Plan

Potentiel d'elasticite

- Contexte infinitésimal
  tenseur des déformations infinitésimales : $\underset{\sim}{\varepsilon}$
- Elasticité non linéaire

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{\varepsilon}) = W'(\underset{\sim}{\varepsilon})$$

  $W(\underset{\sim}{\varepsilon})$ potentiel d'élasticité
- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

  $\underset{\approx}{C}$ tenseur des modules d'élasticité

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

  loi de Hooke

Potentiel dual

- Elasticité non linéaire

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{\partial W^?}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = W^{?\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$$

  $W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ potentiel dual

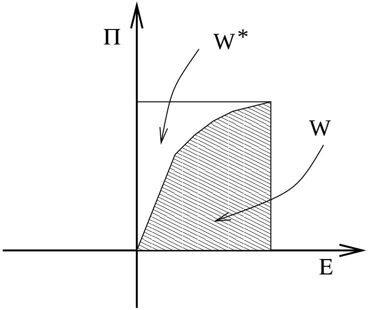
- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\approx}{S} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

  $\underset{\approx}{S}$ tenseur des souplesses

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\approx}{S} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \underset{\approx}{S} = \underset{\approx}{C}^{-1}$$

Potentiel d'elasticite et potentiel dual



$$W(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \int_0^{\underset{\sim}{\varepsilon}} W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) : d\underset{\sim}{\varepsilon} = \int_0^{\underset{\sim}{\varepsilon}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : d\underset{\sim}{\varepsilon}$$

aire sous la courbe

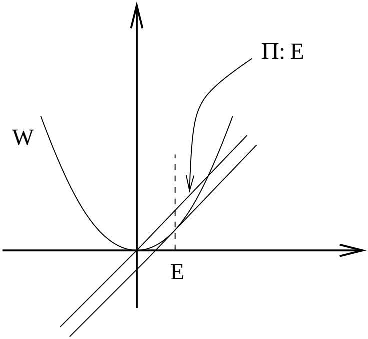
$$W^{?}(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \int_0^{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} W^{?\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \int_0^{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \underset{\sim}{\varepsilon} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

aire complémentaire

$$W(\underset{\sim}{\varepsilon}) + W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - W(\underset{\sim}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = W'(\underset{\sim}{\varepsilon})$$

Convexite du potentiel d'elasticite



La fonction, pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ donné,

$$f(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\mathbf{A}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^{\mathbf{A}} - W(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\mathbf{A}})$$

présente un maximun lorsque W est convexe.
Le maximum est obtenu pour $\underset{\sim}{\varepsilon}^{\mathbf{A}} = \underset{\sim}{\varepsilon}$ tel que

$$W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

Par conséquent,

$$W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \max_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))$$

Plan

Theoreme des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0, \quad \sigma_{ij;j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{u}^*$ (à dérivées premières bornées) :

Theoreme des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\sigma}(\underline{x})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma} + \rho \underline{f} = 0, \quad \sigma_{ij;j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{u}^*$ (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij;j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \forall \underline{u}^*$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij;j} u_i^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

$$\int_\Omega (\sigma_{ij} u_i^*)_{;j} - \sigma_{ij} u_{i;j}^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

$$\int_{@\Omega} \sigma_{ij} u_i^* n_j \, dS - \int_\Omega \sigma_{ij} u_{i;j}^* \, dV + \int_\Omega \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

Theoreme des travaux virtuels

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^* \, dV = \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* \, dV + \int_{@\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* \, dS, \quad \forall \underline{u}^*$$

avec $\underline{t} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}$

$$W^{int} + W^{ext} + W^{contact} = 0$$

$$\mathcal{P}^{int} + \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{contact} = 0$$

théorème des travaux/puissances virtuelles dans le cas statique

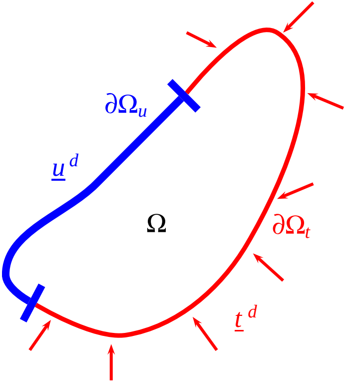
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}^*$ non nécessairement liés par la loi de comportement, et sans restriction sur les CL

En particulier, pour $\underline{u}^* = \underline{u}$, le champ solution, en l'absence de discontinuités :

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} \, dV = \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV + \int_{@\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u} \, dS$$

Plan

Probleme aux limites



- déplacements imposés $\underline{u} = \underline{u}^{\,d}$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{t} = \underline{t}^{\,d}$ sur $\partial\Omega_t$

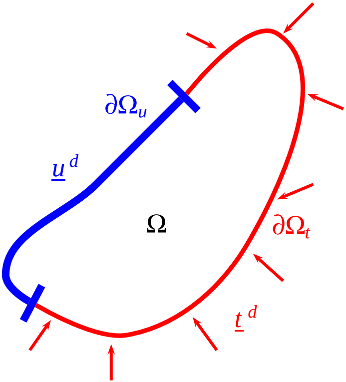
$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$$

Un champ $\underline{u}^{\,*}(\underline{x})$ sur Ω est **cinematiquement admissible** (C.A.) ssi $\underline{u}^{\,*} = \underline{u}^{\,d}$, $\forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$.

Un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}(\underline{x})$ sur Ω est **statiquement admissible** (S.A.) ssi $\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} + \rho \underline{f} = 0$ et $\underline{t} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n} = \underline{t}^{\,d}$, $\forall \underline{x} \in \partial\Omega_t$.

Probleme aux limites



- déplacements imposés $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{t} = \underline{t}^d$ sur $\partial\Omega_t$

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$$

Un champ $\underline{u}^*$ C.A. et un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$ S.A. remplissent les conditions du théorème des travaux virtuels

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\sim}{\varepsilon}^* \, dS = \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* \, dV + \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* \, dV$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho \underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{@\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho\underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{u})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{u}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho\underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\,dV - \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot \underline{u}^*\,dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\,dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{u})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{u}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\,dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\,dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\,dS \\
&\geq \int_\Omega W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\,dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\,dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\,dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho\underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{u})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{u}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS \\
&\geq \int_\Omega \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho\underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{u})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{u}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS \\
&\geq \int_\Omega \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS = 0 \\
&\quad \text{par application du TTV pour } \underset{\sim}{\sigma} \text{ et } \underline{u}^* - \underline{u}
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{u}^*$, pour des efforts $\rho \underline{f}$ et $\underline{t}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{u})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{u}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) \quad &= \quad \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \quad \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS \\
&\geq \quad 0
\end{aligned}$$

La solution $\underline{u}$ minimise l'énergie potentielle $\mathcal{E}$

Unicite du minimum de l'energie potentielle

Soient $\underline{u}$ le champ solution du problème et $\underline{u}^*$ un champ C.A. tel que

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) = 0$$

Cela implique que

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u})\, dS = 0$$

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV = \int_\Omega \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})$$

d'après le TTV pour le couple $(\underset{\sim}{\sigma}, \underline{u}^* - \underline{u})$.

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}) - W' \quad (W \quad '($$

Plan

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) = \int_\Omega W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - \mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega (W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS
\end{aligned}$$

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} (W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS \\
&\geq \int_{\Omega} W^{?\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\
&- \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS
\end{aligned}$$

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \;&=\; \int_{\Omega} (W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&-\; \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS \\
&\geq\; \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\
&-\; \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS
\end{aligned}$$

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \quad &= \quad \int_{\Omega} (W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \quad \int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS \\
&\geq \quad 0
\end{aligned}$$

par application successive du TTV pour $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}, \underline{u}\,)$ et $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{u}\,)$ et différence entre ces deux équations

Energie complementaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{u}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) & = & \displaystyle\int_{\Omega} (W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\ & - & \displaystyle\int_{@\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dS \\ & \geq & 0 \end{array}$$

Le champ de contraintes solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ minimise l'énergie complémentaire $\mathcal{E}^{?}$.

La solution en contraintes du problème d'élasticité est le minimum de l'énergie complémentaire.

Plan

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}) + W^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\
&- \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\ dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}\ dS
\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\, dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}\, dS\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \\
&- \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} \; dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u} \; dS \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \\
&- \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\, dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}\, dS \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(\underline{u}) \leq \mathcal{E}(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \text{ C.A.}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \\ &- \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\ dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}\ dS \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$-\mathcal{E}^{?}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{u}) \leq \mathcal{E}(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \text{ C.A.}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \\
&- \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\, dV - \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}\, dS \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$
\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \text{ S.A.}, \quad -\mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) \leq -\mathcal{E}^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{u}) \leq \mathcal{E}(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \text{ C.A.}
$$

Plan

Theoremes de l'energie en elasticite linearisee

Pour tout champ de déplacements $\underline{u}^*$ C.A.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\ dV - \int_{@\Omega_t} \underline{t}^{\,d} \cdot \underline{u}\ dS$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon}' : \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}'\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{@\Omega_t} \underline{t}^{\,d} \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Theoremes de l'energie en elasticite linearisee

Pour tout champ de déplacements $\underline{u}^*$ C.A.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\; dV - \int_{@\Omega_t} \underline{t}^{\,d} \cdot \underline{u}\; dS$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon}' : \underset{\approx}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}'\, dV - \int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^*\, dV - \int_{@\Omega_t} \underline{t}^{\,d} \cdot \underline{u}^*\, dS$$

Pour tout champ de contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$ S.A.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\approx}{S} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dV$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\approx}{S} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger\, dV - \int_{@\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}^{\,d}\, dV$$

Formule de Clapeyron

Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864), études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon})\, dV = \int_\Omega W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV =$$

Formule de Clapeyron

Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864), études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon})\, dV = \int_\Omega W^?(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \rho \underline{f} \cdot \underline{u}\; dV + \int_{@\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}\,) \cdot \underline{u}\; dV\right)$$

L'énergie élastique stockée dans le corps matériel est égale à la moitié du travail de tous les efforts appliqués.

Plan

Consignes pour l'examen

- TOUS documents autorisés!
- Calculatrice
- Etudier spécifiquement :
  - les exercices de PC en profondeur
  - les annales sur le site du cours: http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/mmc_paris.php
  - le théorème de superposition en élasticité linéarisée
  - les problèmes du trou dans une plaque jusqu'à la notion de fissure (comprise)

Le problème sera passionnant et assez incroyable, vous verrez...