CINÉMATIQUE

1 Équilibre et continuité

1.1 Équilibre d'un solide

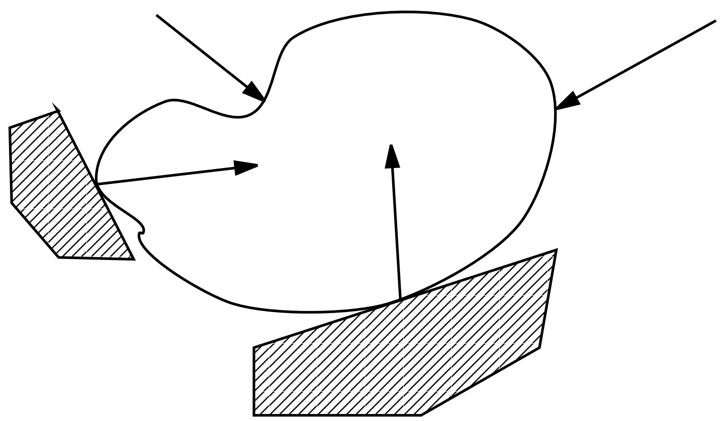

FIG. 1 – Équilibre d'un solide

Tout solide dont on étudiera les efforts internes et les déformations sera considéré en équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées (figure 1). Les réactions des appuis font équilibre aux charges directement appliquées. Ceci se traduit par des équations générales d'équilibre du corps. Si le nombre d'équations est suffisant pour déterminer les réactions, la structure est dite isostatique. Sinon, il est nécessaire de faire appel à d'autres relations, et la structure est dite hyperstatique.

1.2 Continuité de la matière

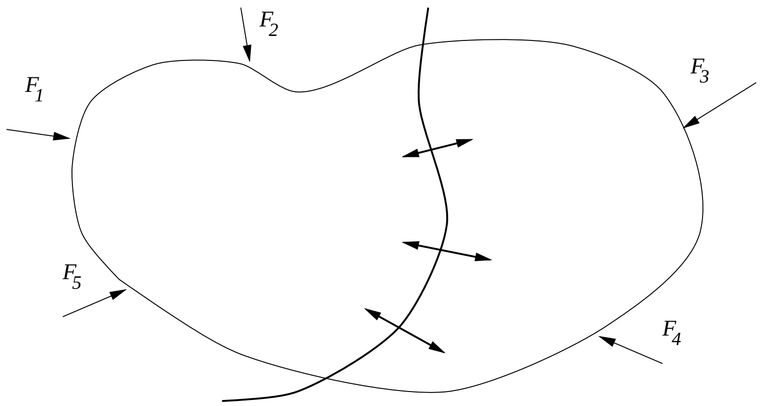

FIG. 2 – Continuité de la matière

Toutes les charges appliquées (y compris les réactions aux appuis et le poids propre) provoquent des forces internes qui sollicitent la matière du corps considéré. La continuité de la matière implique que les efforts internes qui s'exercent de part et d'autre d'une section quelconque s'équilibrent (figure 2). Les efforts internes d'un côté de cette section font équilibre à toute les forces extérieures appliquées depuis cette section jusqu'à l'extrémité du corps considéré.

La continuité de la matière suppose que l'on se place d'un point de vue suffisamment macroscopique pour étudier son comportement. En effet, à l'échelle atomique par exemple, la matière n'est plus continue. Elle est constituée d'atomes dont la masse est essentiellement concentrée sur le noyau. Le fait de se placer d'un point de vue macroscopique permet en outre de définir dans le matériau une masse volumique ρ qui, intégrée sur l'ensemble de son volume, fournit la masse totale du solide.

2 Transformation d'un solide

2.1 Configurations

Lorsqu'un solide continu se déforme au cours du temps, il adopte une série de configurations $C(t)$, et le fait de représenter une grandeur dans l'une

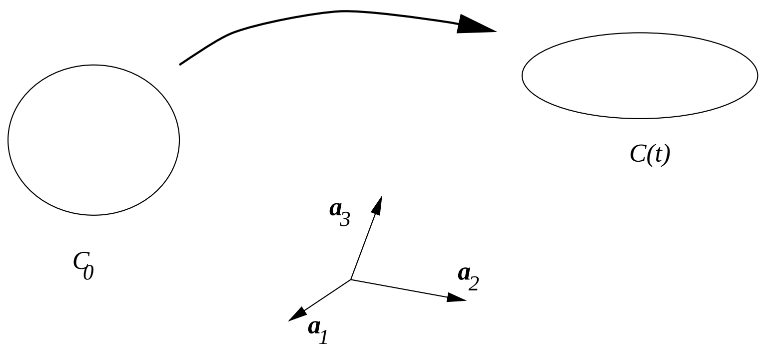

FIG. 3 – Configurations initiale et actuelle d'un solide

ou l'autre de ces configurations change parfois sa valeur, et souvent sa vitesse de variation (notion de dérivée convective). Pour simplifier, nous ne considérerons ici que la configuration initiale C_0 et la configuration courante $C(t)$ d'un solide (des configurations intermédiaires sont parfois utilisées en mécanique, telles que la configuration "relâchée" en élasto-plasticité). La figure 3 schématise ces configurations.

La configuration utilisée pour représenter des grandeurs (forces, déplacements, ...) définit le type d'analyse réalisée. Si toutes les grandeurs sont représentées dans C_0, le type d'analyse est dit lagrangien. Inversement, si toutes les grandeurs sont représentées dans $C(t)$, le type d'analyse est dit eulérien. Souvent, par abus de langage, on parle de configurations lagrangienne ou eulérienne.

Il convient de bien distinguer les notions de configuration et de repère. Dans la figure 3, le repère $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3)$ est fixe. Toutes les grandeurs mentionnées dans ce texte peuvent être exprimées dans ce repère. Par exemple, si P_0 et P sont les positions d'un même point matériel respectivement à $t = 0$ (configuration C_0) et à l'instant t courant (configuration $C(t)$) , on notera :

$$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{X} = X_i \overrightarrow{a}_i \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x} = x_i \overrightarrow{a}_i \tag{2}$$

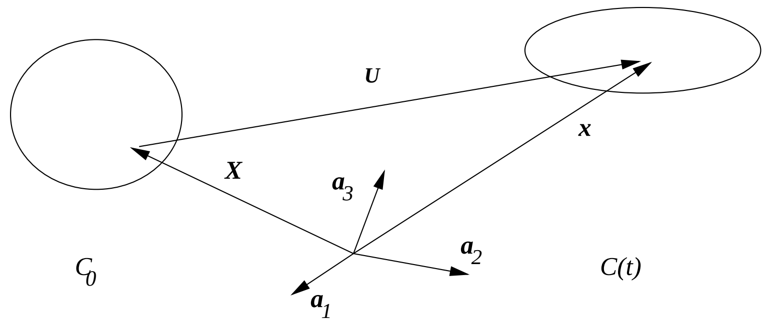

FIG. 4 – Description lagrangienne d'une transformation

2.2 Description lagrangienne

Dans une analyse lagrangienne (figure 4), on décrit la transformation du solide à l'aide des coordonnées de chaque point $\overrightarrow{x}$. Ces coordonnées seront évidemment fonction du temps t, et de la position initiale du point $\overrightarrow{X}$. Ceci s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},t) \text{ avec } \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},0) = \overrightarrow{X} \quad (3)$$

où $\overrightarrow{\Phi}$ est une fonction vectorielle. Pour assurer la continuité du solide en cours de transformation, cette fonction doit être bijective (existence d'une transformation inverse), et de classe C^1 par rapport aux variables d'espace et de temps. Elle permet de définir le vecteur déplacement d'un point du solide au cours de la transformation. Entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant courant t, le vecteur déplacement $\overrightarrow{U}$ d'un point de position initiale $\overrightarrow{X}$ est donné par :

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X},t) = \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},t) - \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},0) = \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},t) - \overrightarrow{X} \quad (4)$$

En description lagrangienne, X_1, X_2, X_3 et t sont appelées *variables de Lagrange*, tandis que x_1, x_2 et x_3 sont appelées *inconnues de Lagrange*.

2.2.1 Trajectoire

Lorsque l'on suit un point du milieu au cours du temps, celui-ci décrit une courbe de l'espace paramétrée par t, appelée trajectoire. A l'aide de cette trajectoire, on peut définir la vitesse d'un point à l'instant t. Le point est caractérisé par sa position $\overrightarrow{X}$ dans la configuration initiale C_0, et sa vitesse courante $\overrightarrow{V}$ est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X},t) = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{\Phi}}{\partial t}(\overrightarrow{X},t) = \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial t}(\overrightarrow{X},t) \quad (5)$$

2.2.2 Lignes d'émission

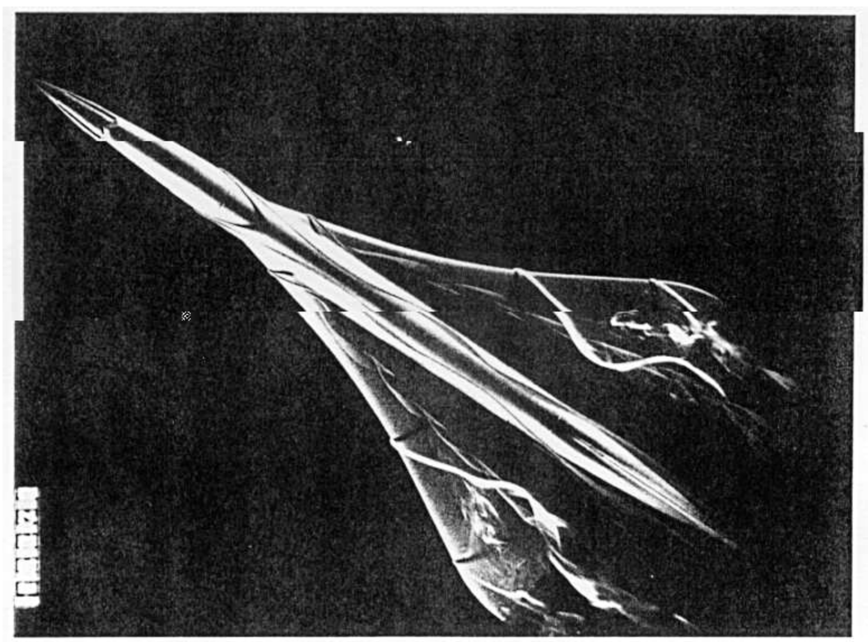

FIG. 5 – Émission de traceurs autour d'une maquette du Concorde

Lorsque l'on marque toutes les particules passant par un point P à l'instant t_0, les positions de ces particules à tout instant ultérieur t décrivent les lignes d'émission du point P. En aérodynamique, ces lignes d'émission sont obtenues en utilisant des traceurs pour suivre les écoulements autour de l'objet se déplaçant (figure 5). Elles peuvent également être produites par un obstacle fixe sur un fluide en mouvement (figure 6).

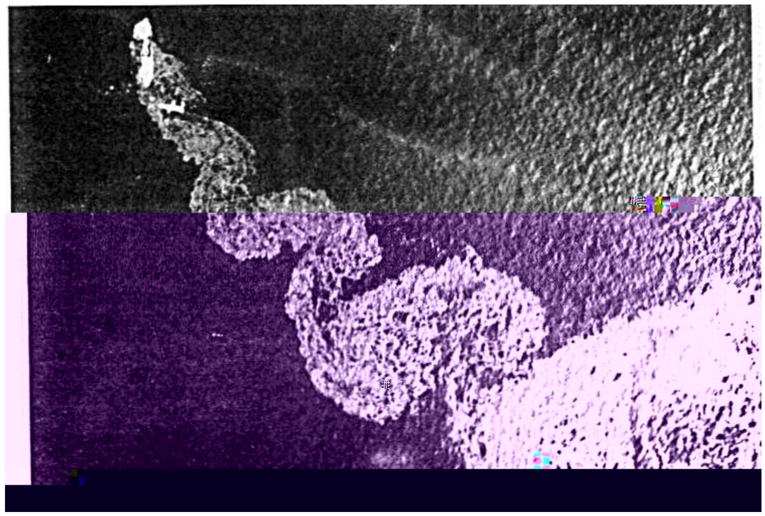

FIG. 6 – Trace produite sur la mer par un cargo échoué

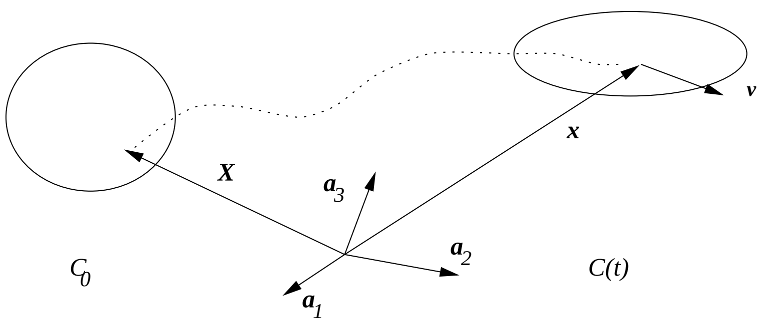

FIG. 7 – Description eulérienne d'une transformation

2.3 Description eulérienne

Dans une analyse eulérienne (figure 7), on décrit la transformation du solide à l'aide de la vitesse courante $\overrightarrow{v}$ de chaque point $\overrightarrow{x}$ de la configuration $C(t)$. Cette vitesse $\overrightarrow{v}$ est donc ici une fonction de la position courante $\overrightarrow{x}$ et du temps t.

x_1, x_2, x_3 et t sont appelées *variables d'Euler*, tandis que les composantes v_1, v_2 et v_3 du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ sont appelées *inconnues d'Euler*.

2.3.1 obtention des trajectoires

La vitesse eulérienne $\overrightarrow{v}$ permet de retrouver la fonction $\overrightarrow{\Phi}$ de la description lagrangienne, et donc les trajectoires des points matériels, par intégration au cours du temps du système di�érentiel :

$$\begin{cases} d\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)dt \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{X} \text{ à } t = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Toutefois, cette intégration en temps s'avère souvent délicate car il faut constamment actualiser la configuration du système. En e�et, la vitesse eulérienne $\overrightarrow{v}$ d'un point matériel dépend de sa position courante $\overrightarrow{x}$, elle-même fonction de sa position initiale et du temps.

2.3.2 Mouvement stationnaire

Lorsque la vitesse eulérienne des points matériels ne dépend pas du temps, le mouvement est dit stationnaire (ou permanent). Dans ce cas, la ligne d'émission d'un point P sera identique à la partie aval de la trajectoire passant par P, puisque l'instant de passage en ce point n'a plus d'influence. Les écoulements stationnaires (ou permanents) en mécanique des fluides correspondent à ce cas.

3 Équations de transport

3.1 Tenseur gradient d'une transformation

Pour décrire une transformation quelconque, on la remplace localement, en chaque point $\overrightarrow{X}$ de la configuration C_0, par son application linéaire tangente. Cette application est caractérisée par un tenseur $\underline{F}$, gradient de la fonction vectorielle $\overrightarrow{\Phi}$ reliant les positions initiale et courante d'un point. Nous avons donc :

$$\underline{F}(\overrightarrow{X},t) = \underline{grad}(\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},t)) = \underline{I} + \underline{grad}(\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X},t)) \tag{7}$$

où $\underline{I}$ est le tenseur identité. Le tenseur gradient de la transformation d'un solide $\underline{F}$ permet donc de relier localement les configurations C_0 et $C(t)$. Il suppose implicitement que la transformation du matériau est continue, c'est-à-dire qu'il ne se forme pas de trou ni d'interface. La formation de trous et d'interfaces résulte par exemple de l'endommagement du matériau en cours de transformation, mais ceci sort du cadre de ce cours. Le tenseur gradient de la transformation peut également s'écrire pour le passage inverse sous la forme :

$$\underline{F}^{-1}(\overrightarrow{x},t) = \underline{grad}(\overrightarrow{\Phi})^{-1}(\overrightarrow{x},t) \tag{8}$$

3.2 Transport de quantités élémentaires

D'après la définition précédente du tenseur gradient d'une transformation, un vecteur élémentaire $d\overrightarrow{X}$ de C_0 se transformera en un vecteur $d\overrightarrow{x}$ de $C(t)$ sous la forme :

$$d\overrightarrow{x} = \underline{F}.d\overrightarrow{X} = (\underline{I} + \underline{grad}(\overrightarrow{U})).d\overrightarrow{X} \tag{9}$$

Le transport d'un vecteur élémentaire se fait donc directement par l'application linéaire tangente de la transformation, ou à l'aide du gradient des déplacements.

Les volumes dv de $C(t)$ et dV de C_0, associés respectivement à trois vecteurs élémentaires $d\overrightarrow{x}$, $d\overrightarrow{y}$ et $d\overrightarrow{z}$ de $C(t)$, et $d\overrightarrow{X}$, $d\overrightarrow{Y}$ et $d\overrightarrow{Z}$ de C_0, sont donnés par les produits mixtes :

$$\left\{ \begin{array}{l} dV = [d\overrightarrow{X},d\overrightarrow{Y},d\overrightarrow{Z}] = (d\overrightarrow{X} \wedge d\overrightarrow{Y}).d\overrightarrow{Z} \\ dv = [d\overrightarrow{x},d\overrightarrow{y},d\overrightarrow{z}] = (d\overrightarrow{x} \wedge d\overrightarrow{y}).d\overrightarrow{z} \end{array} \right. \tag{10}$$

En utilisant l'équation de transport des vecteurs élémentaires, on constate que dv et dV sont reliés entre eux sous la forme :

$$dv = JdV \text{ avec } J = det(\overrightarrow{F}) \tag{11}$$

Nous considérons dans $C(t)$ une surface élémentaire caractérisée par un vecteur $d\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}ds$, où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal à cette surface élémentaire, et ds son aire. Dans C_0, cette surface élémentaire était caractérisée par un vecteur $d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{N}dS$. Pour calculer l'évolution de cet élément de surface, on construit un volume élémentaire à l'aide d'un vecteur $d\overrightarrow{z}$ (dans $C(t)$) ou $d\overrightarrow{Z}$ (dans C_0), non contenu dans cette surface. D'après l'équation 11, ce volume élémentaire se transporte de la façon suivante :

$$dv = d\overrightarrow{s}.d\overrightarrow{z} = JdV = Jd\overrightarrow{S}.d\overrightarrow{Z} \tag{12}$$

Il s'en suit, d'après l'équation 9, que l'élément de surface se transporte de la façon suivante :

$$d\overrightarrow{s} = J(\underline{F}^{-1})^t.d\overrightarrow{S} \tag{13}$$

4 Équations de conservation

4.1 Notion de dérivée particulaire

Les équations de base de la mécanique des milieux continus résultent de l'écriture de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement sur le domaine étudié. Pour écrire ces lois de conservation, il est important de prendre en compte le mouvement du solide, et donc d'utiliser une dérivée particulaire pour les fonctions et pour les intégrales mises en jeu.

4.1.1 Dérivée particulaire d'une fonction

Considérons une grandeur physique quelconque associée à un point matériel P de coordonnées $\overrightarrow{X}$ dans la configuration C_0 et $\overrightarrow{x}$ dans la configuration $C(t)$. Nous exprimerons cette grandeur sous la forme :

- $G(\overrightarrow{X},t)$ en configuration lagrangienne,
- $g(\overrightarrow{x},t)$ en configuration eulérienne.

En configuration eulérienne, la vitesse de variation de g au cours de la transformation du solide doit prendre en compte le fait que, au cours de cette transformation, les coordonnées $\overrightarrow{x}$ du point P changent. Cette vitesse de variation est donc calculée à l'aide d'une dérivée particulaire suivant la trajectoire du point P :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}(g) \tag{14}$$

En configuration lagrangienne, la fonction G ne dépend que des coordonnées initiales (et donc fixes) du point P et du temps. La vitesse de variation de G est donc directement obtenue sous la forme :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{15}$$

Compte tenu de la relation vectorielle en les coordonnées $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{x}$ (équation 3), on a $g(\overrightarrow{x},t) = g(\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{X},t),t) = G(\overrightarrow{X},t)$. La vitesse de variation de la quantité physique considérée peut donc s'écrire de deux façons di�érentes :

$$\frac{dg}{dt}(\overrightarrow{x},t) = \frac{\partial G}{\partial t}(\overrightarrow{X},t) \tag{16}$$

Ce que nous venons de voir pour une quantité scalaire peut tout à fait être appliqué à chaque composante d'un vecteur, et plus généralement d'un tenseur. Par exemple, la vitesse d'un point matériel est la vitesse de variation du vecteur position d'un point, Elle peut être écrite de façon lagrangienne (vecteur $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X},t)$) ou eulérienne (vecteur $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$), ce qui conduit à la relation suivante :

$$\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X},t) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{X},t),t) \tag{17}$$

4.1.2 Dérivée particulaire d'intégrales de volume

Considérons maintenant l'intégrale de volume de la fonction scalaire $g(\overrightarrow{x},t)$:

$$I(t) = \int_\Omega g(\overrightarrow{x},t)dv \tag{18}$$

On montre que la vitesse de variation de cette intégrale de volume est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dI}{dt} = \int_\Omega (\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\overrightarrow{v}))dv \tag{19}$$

Si l'intégrale de volume porte sur une fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x},t)$, on obtient le résultat suivant :

$$\overrightarrow{I}(t) = \int_{\Omega} \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x},t)dv \tag{20}$$

$$\frac{d\overrightarrow{I}}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} + \overrightarrow{div}\left(\overrightarrow{g} \otimes \overrightarrow{v}\right) \right) dv \tag{21}$$

4.2 Conservation de la masse

Si l'on considère un système matériel Ω formé d'un ou plusieurs constituants non miscibles et si on exclue l'existence d'éventuelles réactions chimiques alors la loi de conservation de la masse s'énonce ainsi : la masse de tout domaine matériel Ω_A, connexe, contenu dans Ω, et suivi dans son mouvement, reste constante. On a donc :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_A} \rho(\overrightarrow{x},t)dv \right) = 0 \tag{22}$$

En utilisant la formule donnant la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, on obtient :

$$\int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{v}) \right) dv = 0 \tag{23}$$

L'équation ci-dessus étant vraie quel que soit le domaine Ω_A considéré, on en tire l'équation locale de conservation de la masse dans une approche eulérienne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{v}) = 0 \text{ en tout point de } \Omega \tag{24}$$

En utilisant le fait que $div(\rho \overrightarrow{v}) = \rho div(\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}(\rho)$, on peut réécrire l'équation locale sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(\overrightarrow{v}) = 0 \text{ en tout point de } \Omega \tag{25}$$

On aurait pu exprimer la loi de conservation de la masse en écrivant qu'à tout instant la masse associée au domaine Ω_A est égale à la masse associée au même domaine dans la configuration initiale, Ω_A^0. En appelant $\rho_0(\overrightarrow{X})$ et $\rho(\overrightarrow{x},t)$ les masses volumiques du milieu respectivement dans sa configuration initiale et dans sa configuration courante, on peut écrire :

$$\int_{\Omega_A^0} \rho_0(\overrightarrow{X})dV = \int_{\Omega_A} \rho(\overrightarrow{x},t)dv \tag{26}$$

En utilisant maintenant l'équation 11, on peut transformer le second membre de l'équation précédente par changement de variable. On obtient :

$$\int_{\Omega_A} \rho(\overrightarrow{x},t)dv = \int_{\Omega_A^0} \rho(\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{X},t),t)JdV \tag{27}$$

Cette équation nous conduit à la relation $\int_{\Omega_A^0} (\rho_0 - \rho J)\, dV = 0$, qui doit être vérifiée dans tout domaine Ω_A^0. On en déduit alors la forme lagrangienne de l'équation de conservation de la masse :

$$\rho J = \rho_0 \text{ avec } J = det(\underline{F}) \tag{28}$$

L'équation de conservation de la masse permet d'exprimer simplement la dérivée particulaire d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse $dm = \rho dv$. Pour illustrer ce calcul, nous pouvons calculer la dérivée particulaire de la quantité de mouvement calculée sur un domaine Ω_A du solide étudié :

$$\overrightarrow{p}(t) = \int_{\Omega_A} \overrightarrow{v} dm = \int_{\Omega_A} \rho \overrightarrow{v} dv \tag{29}$$

En effet, en utilisant les relations précédentes, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} &= \int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial(\rho \overrightarrow{v})}{\partial t} + \overrightarrow{div}\,(\rho \overrightarrow{v} \otimes \overrightarrow{v}) \right) dv \\
&= \int_{\Omega_A} \left(\rho \underbrace{\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\overrightarrow{v} \otimes \overrightarrow{v}) \right)}_{=\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}} + \overrightarrow{v} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{v}) \right)}_{=0} \right) dv \qquad (30) \\
&= \int_{\Omega_A} \rho \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} dv = \int_{\Omega_A} \rho \overrightarrow{\gamma} dv
\end{aligned}
$$

Dans cette équation, $\overrightarrow{\gamma}$ définit l'accélération d'un point matériel au cours de la transformation.