ÉLASTICITÉ - EXERCICES

Contraintes planes - Déformations planes

Nous travaillons ici dans un système de coordonnées cartésien (O,x_1,x_2,x_3), dans l'hypothèse des petites perturbations, et avec une loi de comportement élastique linéaire isotrope donnée par les coefficients E (module d'Young) et ν (coefficient de Poisson).

- l'hypothèse des déformations planes revient à supposer un champ de déplacements $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2,u_3)$ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1,x_2) \\ u_2 = u_2(x_1,x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

  En déduire la forme du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$ et celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$. Faire un dessin illustrant cette hypothèse et expliquer l'expression obtenue pour le terme σ_{33}.
- l'hypothèse des contraintes planes revient à supposer un vecteur contrainte nul sur la surface de normale x_3. En déduire la forme du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ et celle du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$. Faire un dessin illustrant cette hypothèse et expliquer l'expression obtenue pour ϵ_{33}.
- Nous désirons analyser le comportement mécanique d'une tôle épaisse sollicitée dans son plan. Pour simplifier les calculs, nous souhaitons schématiser ce comportement à l'aide de deux zônes : le plan moyen de la tôle (zône 1) et sa surface supérieure (zône 2). Déterminer en le justifiant quelle zône sera plutôt en contrainte plane, et quelle zône subira plutôt une déformation plane.

Torsion d'un barreau élastique

On considère un cylindre plein, de rayon R, d'axe Oz, et de hauteur H. On note r,θ,z les coordonnés cylindriques que nous utiliserons pour traiter le problème. Le matériau est supposé avoir un comportement élastique isotrope. La face inférieure ($z = 0$) du cylindre est fixe. La surface latérale est libre. La surface supérieure ($z = H$) subit un couple de torsion C, ce qui entraîne une rotation d'angle α de celle-ci.

- En supposant que chaque tranche horizontale du cylindre reste dans le même plan, écrire de quelles coordonnées r, θ ou z dépendent les composantes u, v et w du déplacement de chaque point du cylindre. En déduire une expression simplifiée du tenseur gradient des déplacements $\underline{d}$, puis du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$. En utilisant les coefficients de Lamé λ et μ, exprimer ensuite le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$.
- Écrire le système d'équations correspondant à l'équilibre statique local du cylindre. En supposant $v(r,z)$ linéaire en r et en z, intégrer les équations obtenues pour obtenir une expression de $v(r,z)$. Appliquer ensuite les conditions aux limites en déplacements pour déterminer les constantes.
- En écrivant la condition aux limites en contraintes (couple C), donner la relation entre ce couple et l'angle de rotation α de la face supérieure. En déduire l'évolution de la contrainte équivalente de von Mises en fonction de ce couple dans le cylindre. Lors d'un essai, on souhaite que cette contrainte équivalente ne dépasse pas $200 MPa$, pour éviter une déformation irréversible (plastification) du cylindre. Calculer le rayon maximum du cylindre utilisable pour un couple appliqué $C = 100 Nm$.