



**METHODES ENERGETIQUES**

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

# METHODES ENERGETIQUES



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

Déformations	Contraintes
Hypothèse des petites perturbations	Hypothèse des petites perturbations
vecteur déplacement : $\vec{u}(\vec{X}, t)$	vecteur contrainte : $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$
tenseur des déformations : $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t)$	tenseur des contraintes : $\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}$ avec $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\vec{X}, t)$
équations de compatibilité : $\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk}$	équations d'équilibre : $\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$
conditions aux limites : $\vec{u} = \vec{U}$ sur $\partial\Omega_u$	conditions aux limites : $\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$ sur $\partial\Omega_T$
Loi de comportement : $\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \delta_{ij}$	



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

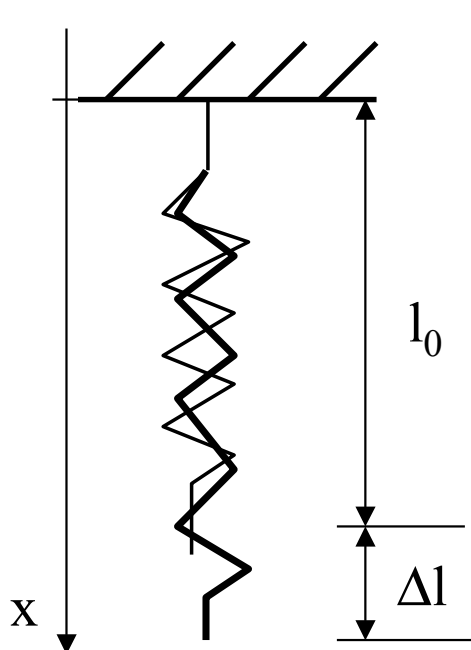
Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

Comment estimer la rigidité de ce ressort ?

Il faut le déformer un peu !!!



$-Fdl$  +  $W = 0$

Travail des forces intérieures

Travail des forces extérieures

$F(x) = k(l-l_0)$

$W = 1/2 k(\Delta l)^2$

Mouvement virtuel  
(il ne sert qu'à estimer k)



**METHODES ENERGETIQUES**

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

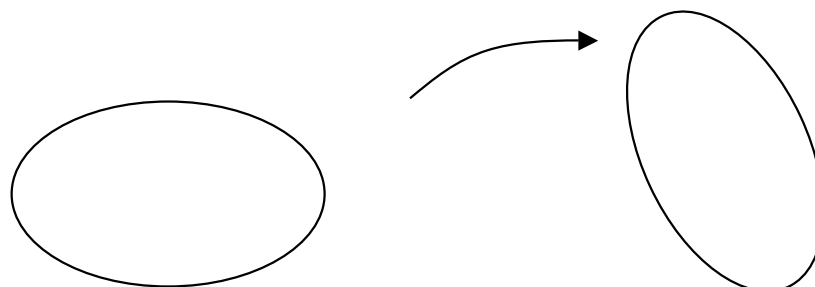
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

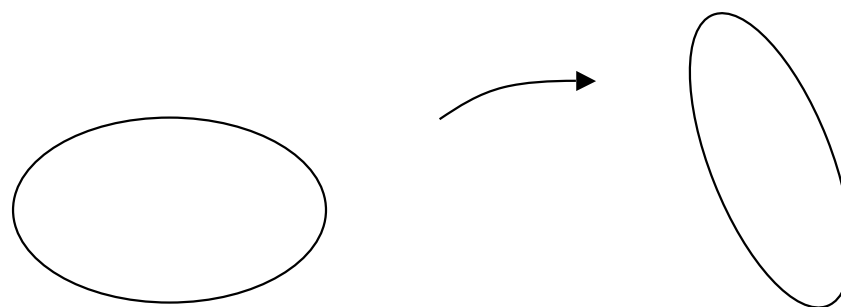
Approche en contraintes

Encadrement de la solution



**OBJECTIVITE**

La puissance virtuelle des efforts intérieurs associés à tout mouvement de corps rigide est nulle



**EQUILIBRE**

La puissance virtuelle des efforts intérieurs ( $P_i$ ) et extérieurs ( $P_e$ ) est égale à celle des accélérations ( $P_a$ )



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

$$P_i + P_e = P_a \text{ avec } \left\{ \begin{aligned} P_i &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \vec{v} dv - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} dv = \int_{\Omega} -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) dv \\ P_e &= \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v} ds \\ P_a &= \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dv \end{aligned} \right.$$

$$\forall \vec{v}, \int_{\Omega} (\underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{v} dv + \int_{\partial\Omega} (\vec{t} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} dv = 0$$

Equations d'équilibre

OU

Définition de  $\sigma$

$$\forall \vec{v}, \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) dv - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v} dv = W(\underline{\underline{\sigma}}, \vec{v}) = 0$$

Fonctionnelle à annuler



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

$$\forall \vec{u}, \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \text{grad}(\vec{u}) \, dv - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} \, dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u} \, dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dv = 0$$

$W(\underline{\sigma}, \vec{u})$  : fonctionnelle à annuler

$$\vec{u} \text{ C.C.A.} \iff \vec{u} = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_U$$

$$\underline{\sigma} \text{ C.S.A.} \iff \begin{aligned} \text{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f} &= \rho \vec{\gamma} \\ \underline{\sigma} \cdot \vec{n} &= \vec{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \end{aligned}$$



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u} \text{ avec } \vec{u} \text{ C.C.A. et } \vec{u}_0 \text{ solution réelle}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{u})$$

$$W = W(\vec{u}, \delta\vec{u}) = \frac{\partial \Pi_p}{\partial \vec{u}} \cdot \delta\vec{u} = 0$$

$$\Pi_p(\vec{u}) = (1/2) \int_{\Omega} \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{u})^t : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{u}) dv - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T} \cdot \vec{u} ds$$

Energie potentielle (minimale !!)



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\delta\sigma}}$  avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  C.S.A. et  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  solution réelle

$$\text{grad}(\vec{u}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

$$W = W(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\delta\sigma}}) = \frac{\partial \Pi_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\delta\sigma}} = 0$$



$$\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}) = - (1/2) \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \, dv + \int_{\partial\Omega_U} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} \, ds$$



Energie complémentaire (maximale !!)





METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

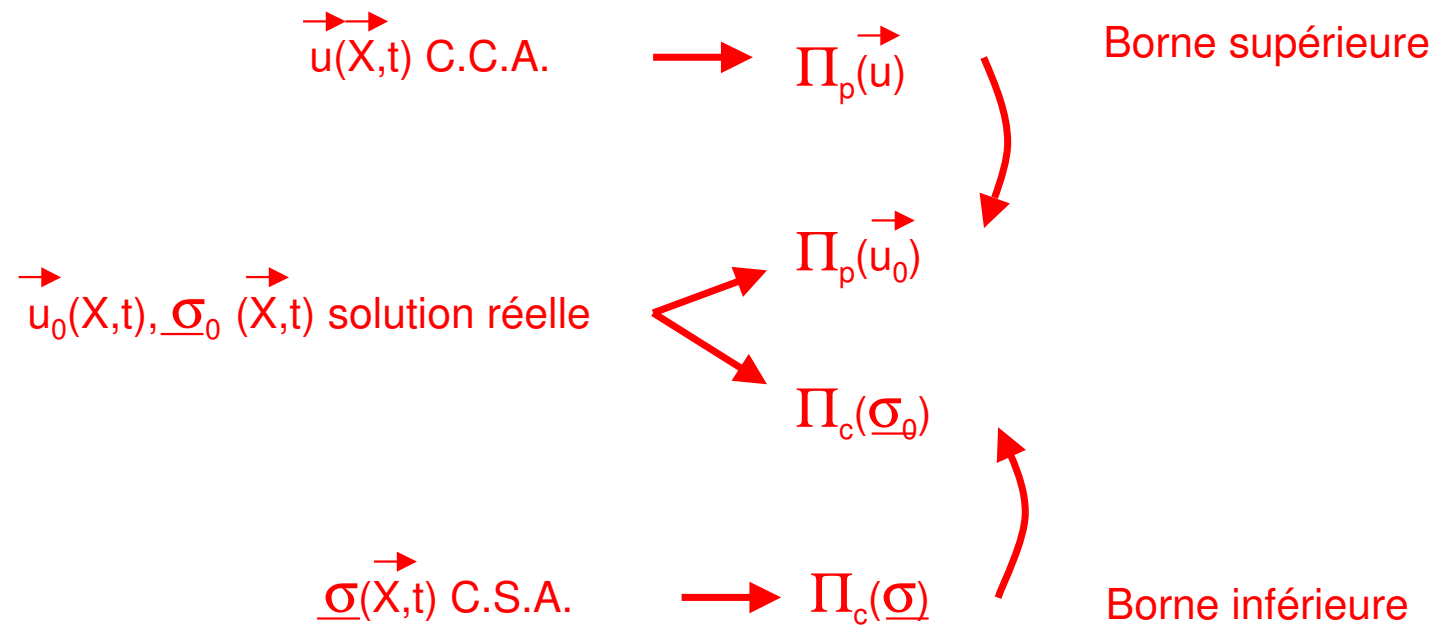
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution





METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

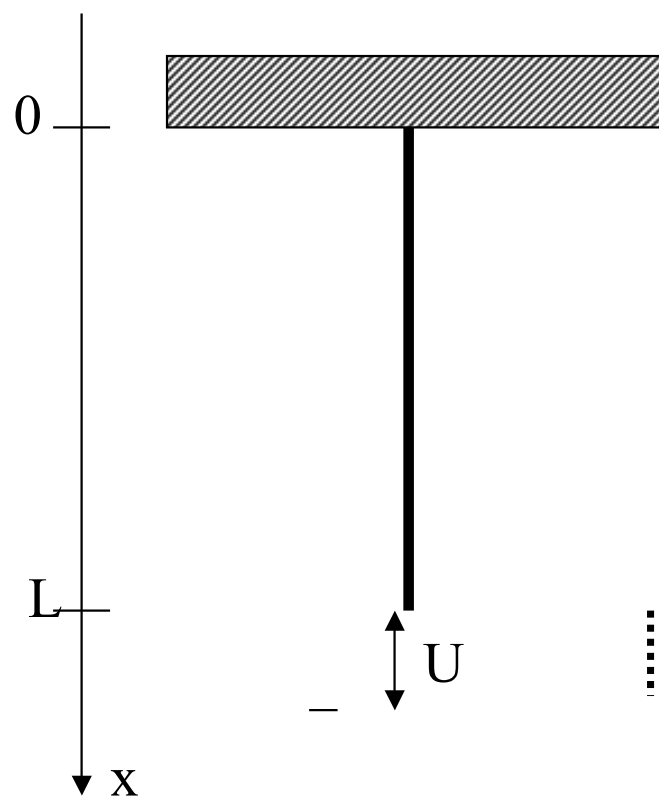
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution



Problème uniaxial  $u(x)$  :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon = u'(x)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma = E u'(x)$$

Solution réelle :

$$\text{div}(\sigma) = E u''(x) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$u(L) = U$$

$$u(x) = (U/L)x$$



$$\sigma(x) = E(U/L)$$



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

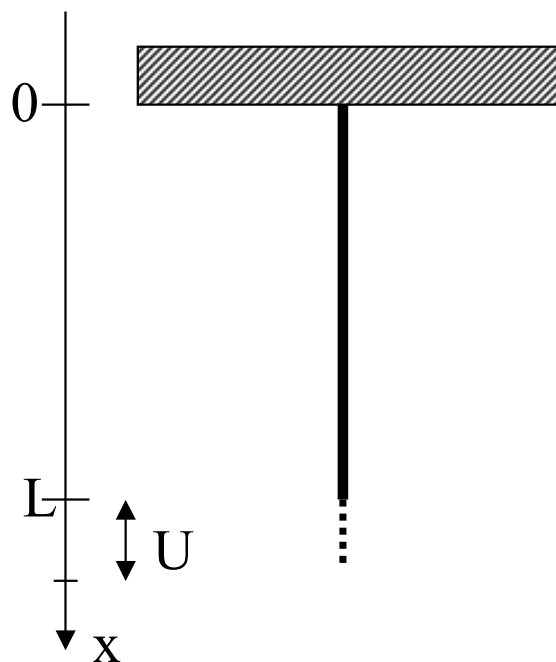
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution



Recherche d'un C.C.A.  $u(x)$  ?

$$u(x) = U (x/L)^n$$

Energie potentielle associée  $\Pi_p$  ?

$$\Pi_p(n) = (1/2) \int_S \int_0^L \sigma \varepsilon dv = \frac{ESU^2}{2L} \frac{n^2}{2n-1}$$

Minimum de l'énergie potentiel ?

$$\frac{d\Pi_p}{dn} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{n = 1}$$



METHODES ENERGETIQUES

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

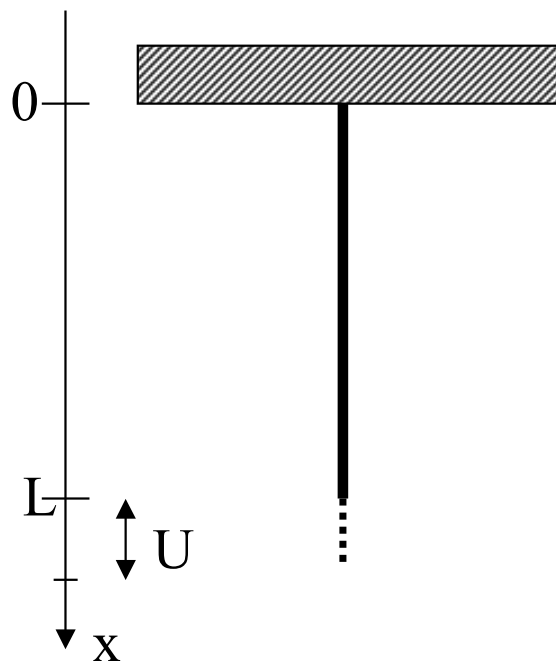
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution



Recherche d'un C.S.A.  $\sigma(x)$  ?

$$\sigma = a$$

Energie complémentaire associée  $\Pi_c$  ?

$$\Pi_c(a) = -\frac{1}{2} \int_S \int_0^L \frac{\sigma^2}{E} dv + \int_S \sigma U ds = SaU - \frac{SL}{2E} a^2$$

Maximum de l'énergie complémentaire ?

$$\frac{d\Pi_c}{da} = 0 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{EU}{L}$$



**METHODES ENERGETIQUES**

Résumé

Principe des puissances virtuelles

Cadre général

Axiomes d'objectivité et d'équilibre

Équations de base

Principe des travaux virtuels – CCA et CSA

Formulation variationnelle

Approche en déplacements – énergie potentielle

Approche en contraintes – énergie complémentaire

Encadrement de la solution

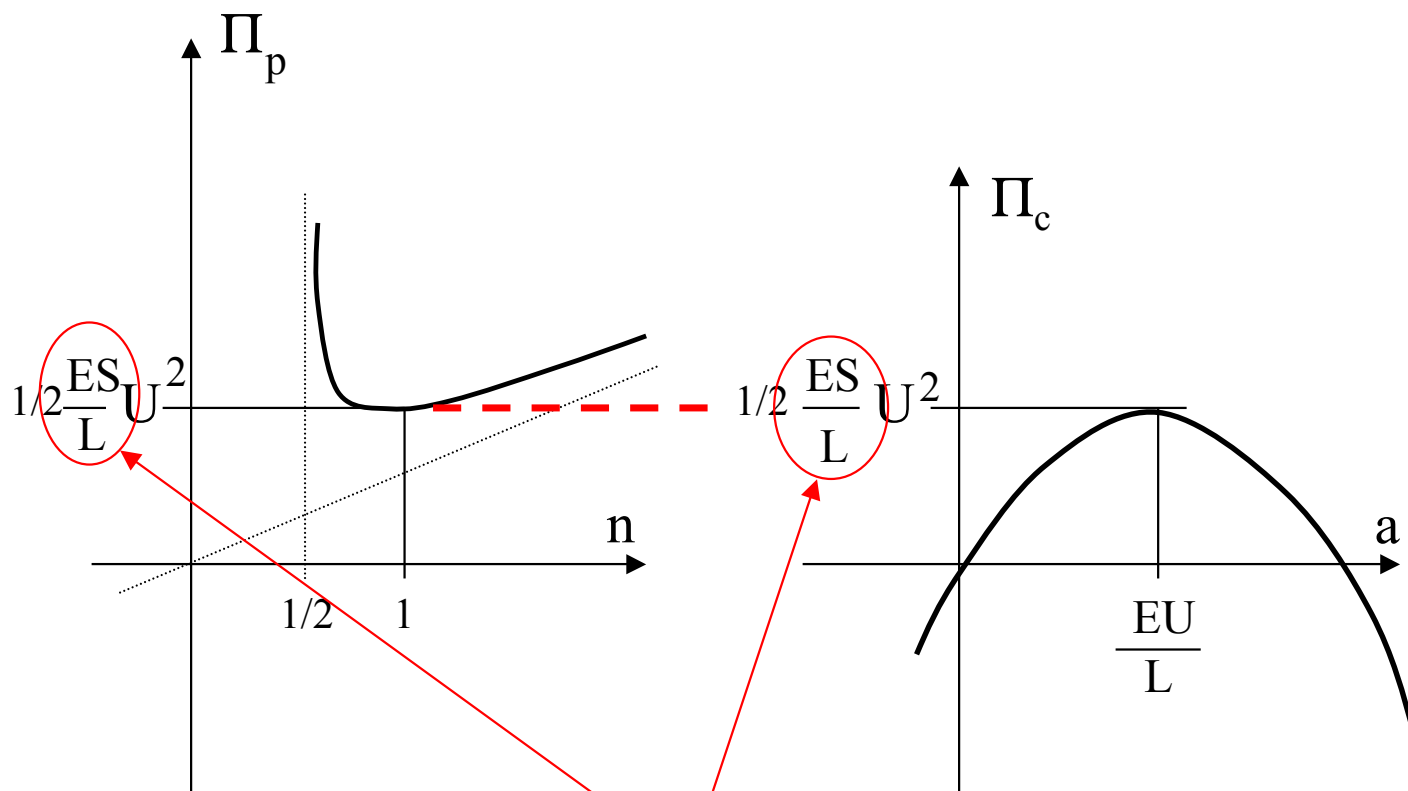
Exemple : allongement d'une barre

Géométrie et cinématique

Approche en déplacements

Approche en contraintes

Encadrement de la solution



**Rigidité de la barre !**