



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Torseur des déformations

Torseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple

APPLICATION AUX POUTRES



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Torseur des déformations

Torseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

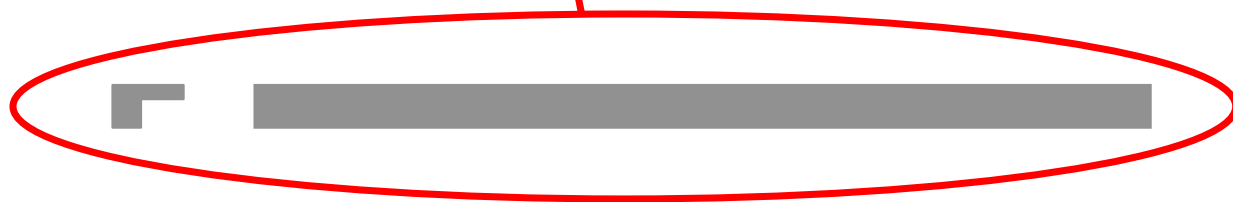
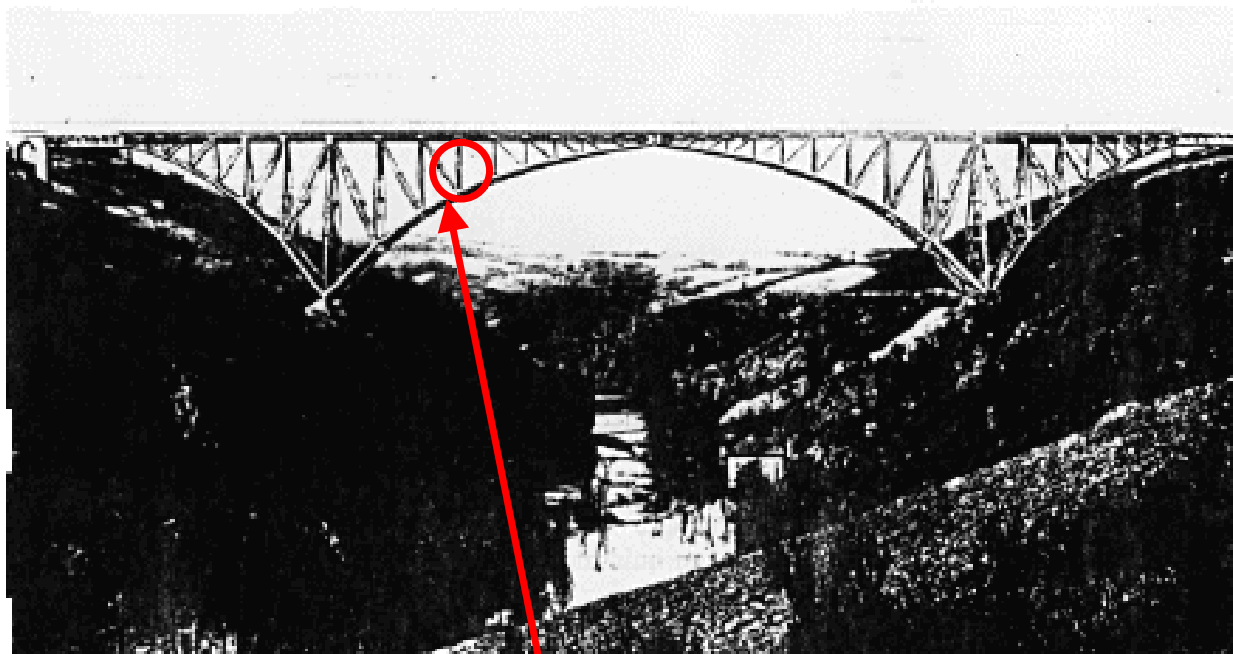
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



Cette structure est un assemblage de poutres !!! Il faut utiliser la **RdM**



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

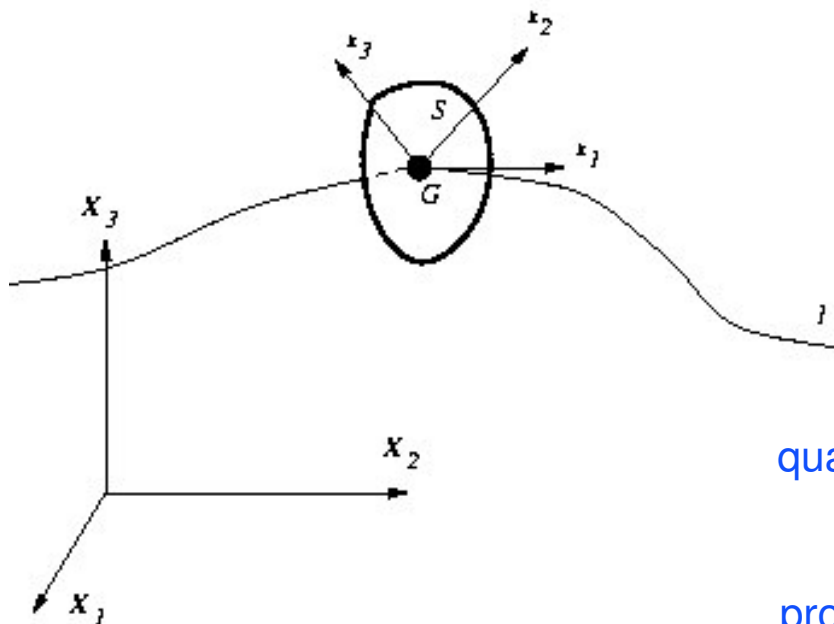
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



- section : $S = \int ds = \int dx_2 dx_3$

- moments d'ordre 1

$$\int x_2 ds = \int x_3 ds = 0$$

- moments d'ordre 2

quadratique : $I_2 = \int x_3^2 ds$ $I_3 = \int x_2^2 ds$

produit : $I_{23} = \int x_2 x_3 ds$

- moments de giration

$$I = I_2 + I_3$$

- section S massive et droite
- longueur L >> les autres
- courbure de L faible
- profil sans discontinuité



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

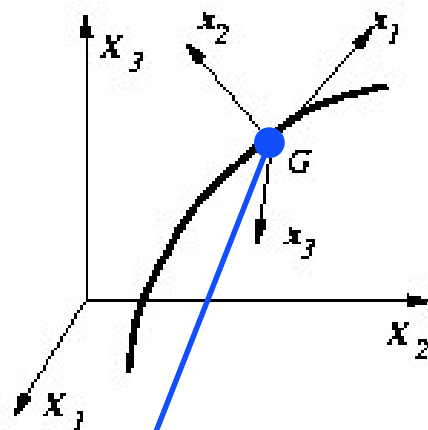
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

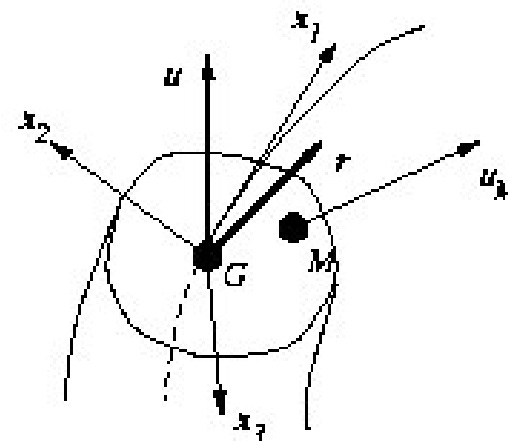
Équations générales

Exemple



Degrés de liberté :
- trois déplacements u_1, u_2, u_3
- trois rotations r_1, r_2, r_3

Au cours de la déformation,
la section S reste droite.



Vecteur déplacement au point M :
 $\vec{u}_M = \vec{u} + \vec{r} \wedge \vec{GM}$

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{r} \end{array} \right\} = \text{tenseur des déplacements}$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

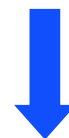
Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple

Vecteur déplacement au point M :

$$\vec{u}_M = \vec{u} + \vec{r} \wedge \vec{\omega}$$



$\underline{\underline{\epsilon}}_M$ complètement déterminé à partir de ϵ_{11} , ϵ_{12} et ϵ_{13}



On introduit le vecteur $\vec{e}_M =$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_M = \vec{e} + \vec{\kappa} \wedge \vec{GM}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e} \\ \vec{\kappa} \end{array} \right\} = \text{tenseur des déformations}$$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

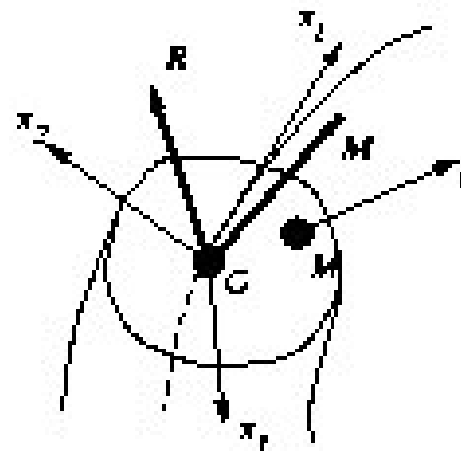
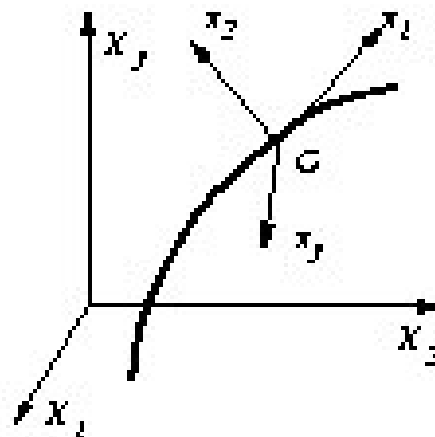
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



Vecteur contrainte au point M sur un élément de S : $\vec{t}_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$

- force résultante : $\vec{R} = \int \vec{t}_M ds$

- moment résultant : $\vec{M} = \int \vec{GM} \wedge \vec{t}_M ds$

$\left. \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{matrix} \right\} = \text{tenseur des efforts}$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & -EI_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{23} & EI_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \text{tenseur des efforts}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{\kappa} \end{Bmatrix} = \text{tenseur des déformations}$$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Torseur des déformations

Torseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

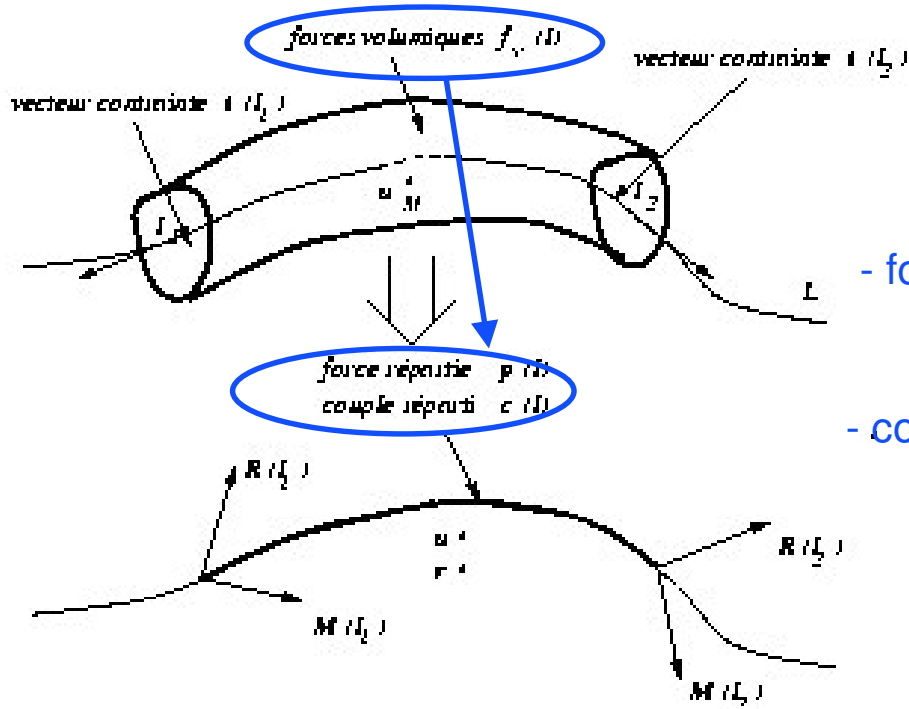
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



- force répartie : $\vec{p} = \int f_v ds$

- couple réparti : $\vec{c} = \int GM \wedge f_v ds$

Equilibre des forces :
 $R' + p = 0$

Equilibre des moments :
 $M' + x_1 \wedge R + c = 0$

Conditions aux limites :
 R et M aux extrémités



$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{matrix} \right\} = \text{torseur des efforts}$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Torseur des déformations

Torseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & -EI_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{23} & EI_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}$$

Efforts internes calculés par les équations d'équilibre

Caractéristiques de la poutre (matériau et géométrie)

Déformations calculées par inversion du système

Courbure :

$$r' = \kappa$$

Déformation :

$$u' + x_1 \wedge r = e$$

Conditions aux limites : u et r aux extrémités



$$\begin{Bmatrix} u \\ r \end{Bmatrix} = \text{torseur des déplacements}$$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

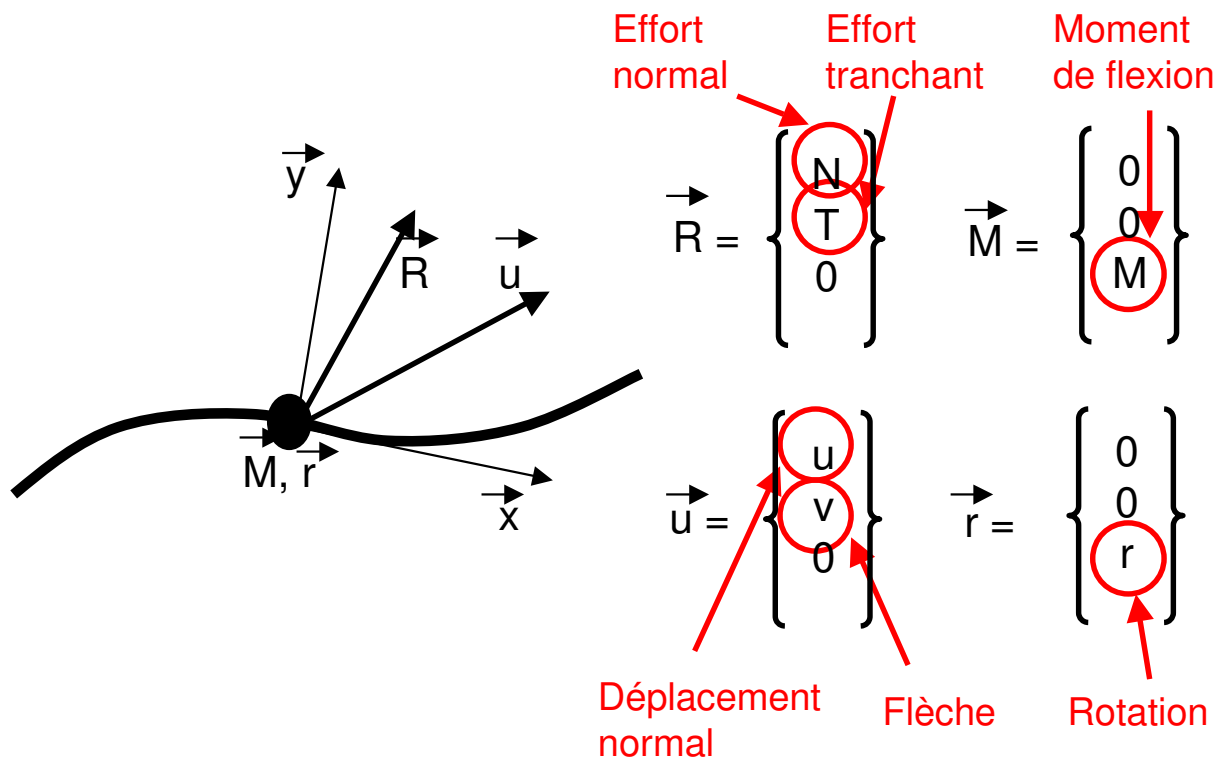
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



Equations d'équilibre :

$$\begin{cases} N' + p_x = 0 \\ T' + p_y = 0 \\ M' + T + c_z = 0 \end{cases}$$

Equations cinématiques :

$$\begin{cases} r' = k_z \\ u' = e_x \\ v' - r = e_y \end{cases}$$



APPLICATION AUX POUTRES

Cadre général

Cinématique

Géométrie

Hypothèse de Navier

Contraintes et déformations

Tenseur des déformations

Tenseur des efforts

Loi de comportement élastique linéaire

Méthode de résolution

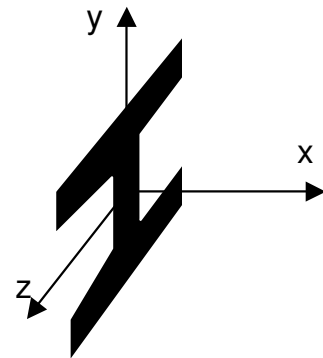
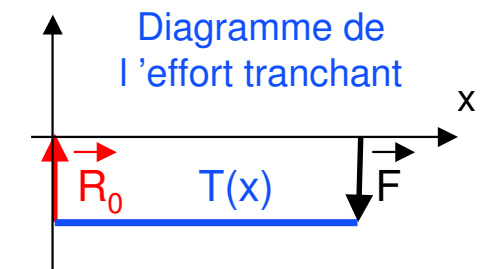
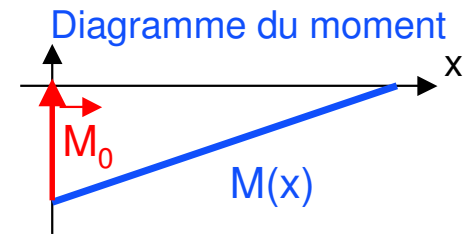
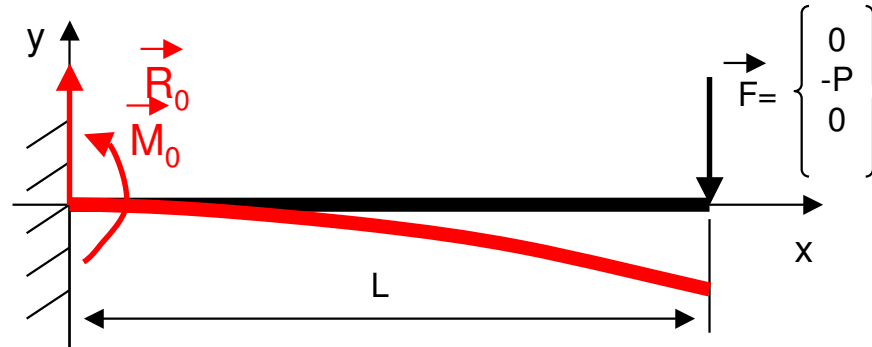
Calcul des efforts internes

Calcul des déplacements et des rotations

Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Équations générales

Exemple



Forme de la section de la poutre :
⇒ S et I_z

Matériau constituant la poutre :
⇒ E et μ

Efforts internes :

$$\begin{cases} N' = 0 \\ T' = 0 \\ M' + T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T = -P \\ M = -P(L-x) \end{cases}$$

Déplacements et rotations :

$$\begin{cases} r' = M/EI_z \\ u' = 0 \\ v' - r = T/\mu S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -(Px/2EI_z)(2L-x) \\ u = 0 \\ v = -(Px^2/6EI_z)(3L-x) - Px/\mu S \end{cases}$$

Contribution du moment (pointing to the first term in v)

Contribution de l'effort tranchant (pointing to the second term in v)