

# **CHAPITRE II**

# **DEFORMATIONS**

## CHAPITRE II : LES DEFORMATIONS

### I. Introduction

### II. Gradient d'une transformation

#### II.1. Tenseur gradient d'une transformation

- II.1.1. Définition
- II.1.2. Exemple
- II.1.3. Transformations homogènes
- II.1.4. Interprétation géométrique du tenseur gradient
- II.1.5. Notations différentielles
- II.1.6. Tenseur inverse du tenseur gradient d'une transformation

#### II.2. Transport convectif

- II.2.1. Éléments d'arc, élément de surface, élément de volume
- II.2.2. Transport convectif d'un vecteur élémentaire
- II.2.2. Transport convectif d'une surface élémentaire

### III. Tenseur des dilatations

#### III.1. Tenseur des dilatations

- III.1.1. Définition
- III.1.2. Propriétés du tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- III.1.3. Tenseur des dilatations de Cauchy-Green à gauche

#### III.2. Dilatation dans une direction

#### III.3. Glissement de deux directions orthogonales

### IV. Déformations

#### IV.1. Tenseurs des déformations

- IV.1.1. Tenseur de Green-Lagrange
- IV.1.2. Tenseur d'Euler-Almansi
- IV.1.3. Relation entre le tenseur de Green-Lagrange et le tenseur d'Euler-Almansi

#### IV.2. Déformation dans une direction, allongement unitaire dans une direction, glissement de deux directions orthogonales

- IV.2.1. Déformation dans une direction
- IV.2.2. Allongement unitaire dans une direction
- IV.2.3. Glissement de deux directions orthogonales

### V. Formulation en fonction des déplacements

#### V.1. Tenseur gradient du déplacement

- V.1.1. Définition
- V.1.2. Décomposition du tenseur gradient du déplacement en partie symétrique et antisymétrique
- V.1.3. Expression des tenseurs  $\underline{C}$  et  $\underline{E}$  en fonction du tenseur  $\underline{H}$

#### V.2. Décomposition du déplacement

- V.2.1. Base principale de la déformation. Dilatations principales
- V.2.1. Déformations principales. Allongements unitaires principaux
- V.2.2. Décomposition du gradient des déplacements en rotation et déformation
- V.2.3. Expression de E et C en fonction de U
- V.2.4. Interprétation géométrique du tenseur dilatation et du tenseur rotation
- V.2.5. Mouvement de solide indéformable

### VI. Déformation en petite transformation

#### VI.1. Petites transformations, petites déformations, petits déplacements

#### VI.2. Expression des tenseurs C et E sous l'hypothèse HPP

- VI.2.1. Expression du tenseur des dilatations et du tenseurs des déformations
- VI.2.2. Dilatation et allongement unitaire dans une direction

#### VI.3. Conditions de compatibilité

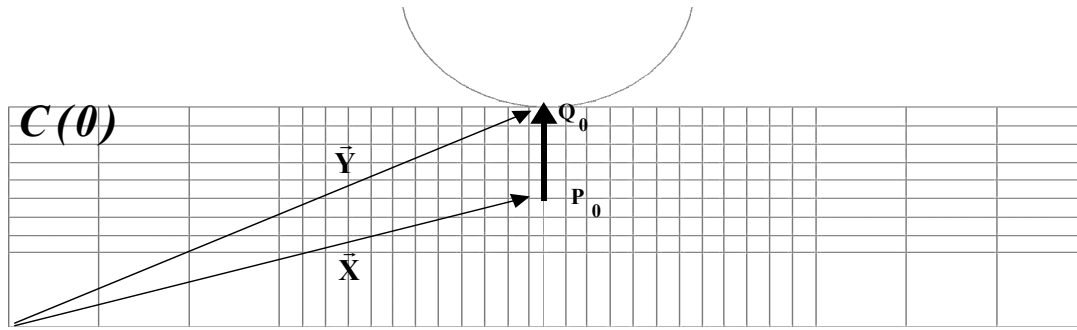
- VI.3.1. Unicité du champ de déplacement
- VI.3.2. Existence d'un champ de déplacement : conditions de compatibilité

### VII. Vitesses de déformation

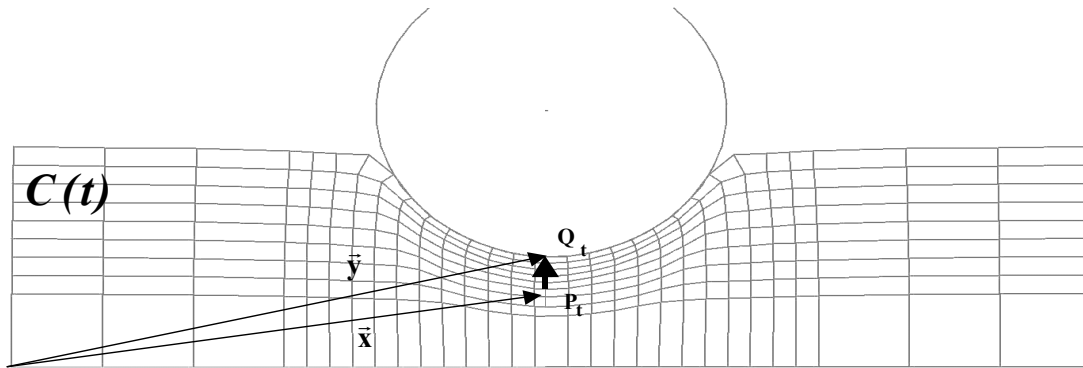
#### VII.1. Tenseur gradient des vitesses $\underline{L}$

#### VII.2. Variation temporelle du tenseur gradient de la transformation

#### VII.3. Tenseur vitesse de déformation et vitesse de rotation



- a -



- b -

Figure 1 : Réseau de lignes dessinées sur un solide (a) avant indentation et (b) après indentation par un cylindre.

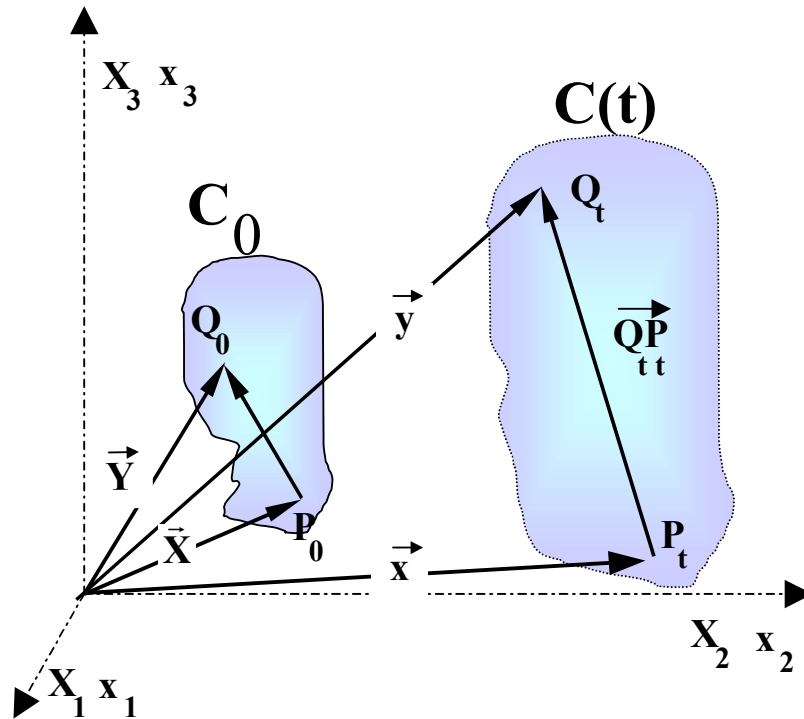


Figure 2 : Configuration initiale et actuelle d'un solide déformé.

## I. INTRODUCTION

La figure 1 représente l'indentation d'un solide par un cylindre. Nous avons choisi comme configuration initiale la configuration non déformée. Sur les deux configurations est représenté un réseau de lignes. Après déformation (dans la configuration  $C(t)$ ), le réseau de lignes initialement orthogonales est distordu. Nous remarquons que la distorsion du réseau

- n'est pas constante dans tout le solide ;
- se traduit par une variation des angles initialement droits ;
- se traduit par une variation des longueurs.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduirons une mesure de la distorsion angulaire et une mesure de la variation des longueurs. Ces mesures doivent être locales, puisque les distorsions du réseau peuvent varier dans le solide.

## II. GRADIENT D'UNE TRANSFORMATION

### II.1. Tenseur gradient d'une transformation

#### II.1.1. Définition

Soit un référentiel  $\mathbb{R}$  dans lequel on a choisi un repère  $R$  constitué d'une origine  $O$  et de la base cartésienne orthonormée. Soit  $C$  une partie quelconque d'un système matériel  $\mathbf{e}$ . On désigne par  $C_0$  la configuration de  $C$  à l'instant initial et par  $C(t)$  sa configuration à l'instant  $t$ . Considérons deux points matériels  $Q$  et  $P$  occupant à l'instant initial les positions  $Q_0, P_0$  et à l'instant  $t$  les positions  $Q_t, P_t$ . Dans la configuration initiale  $Q_0$  et  $P_0$  sont décrits par deux vecteurs

$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{X} = X_p \vec{e}_p \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OQ_0} = \vec{Y} = Y_p \vec{e}_p$$

L'un des objectifs fixés dans l'introduction est de savoir si la distance entre les points  $P_t$  et  $Q_t$  change au cours de la transformation. Pour estimer la distance entre  $P_t$  et  $Q_t$  nous exprimons le vecteur  $\overrightarrow{P_t Q_t}$  en fonction du vecteur. Le passage de la configuration initiale à la configuration à l'instant  $t$  peut être décrit (cfr. chapitre I) par la transformation. Le vecteur  $\overrightarrow{P_t Q_t}$  peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_t Q_t} &= \overrightarrow{OQ_t} - \overrightarrow{OP_t} = \vec{y} - \vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{Y}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \\ y_i - x_i &= \Phi_i(Y_1, Y_2, Y_3) - \Phi_i(X_1, X_2, X_3), \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{Q_t P_t}$  est l'accroissement de la fonction  $\Phi$  pour un accroissement de la variable égal à. Un développement limité au premier ordre donne :

$$\begin{aligned} y_i - x_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_p}(X_1, X_2, X_3)(Y_p - X_p) \\ &+ \left[ (Y_1 - X_1)^2 + (Y_2 - X_2)^2 + (Y_3 - X_3)^2 \right]^{1/2} \alpha_i(Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, Y_3 - X_3, t) \\ &(i=1,2,3) \end{aligned}$$

où  $\alpha_i$  est une fonction qui tend vers 0 si  $Y_i$  tend vers  $X_i$  pour  $i=1,2,3$  (i.e.  $P_0$  tend vers  $Q_0$ ).  
 Sous forme vectorielle on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{y} - \vec{x} &= \underline{\underline{F}}(\vec{X}, t) (\vec{Y} - \vec{X}) + \vec{\alpha}(\vec{Y} - \vec{X}, t) \|\vec{Y} - \vec{X}\| \\ \overline{P_t Q_t} &= \underline{\underline{F}}(\overline{0P_0}, t) \overline{P_0 Q_0} + \vec{\alpha}(\overline{P_0 Q_0}, t) \|\overline{P_0 Q_0}\| \end{aligned} \quad (1)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{F}}(\vec{X}, t) = \overline{\text{grad}}[\vec{\Phi}(\vec{X}, t)]$  est appelé tenseur gradient de la transformation.  $\underline{\underline{F}}$  dépend du point considéré  $Q_0$  et du temps  $t$ . Les composantes de  $\underline{\underline{F}}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}(\vec{X}, t) &= \overline{\text{grad}}[\vec{\Phi}(\vec{X}, t)] = \overline{\text{grad}}[\vec{x}(\vec{X}, t)] \\ F_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (2)$$

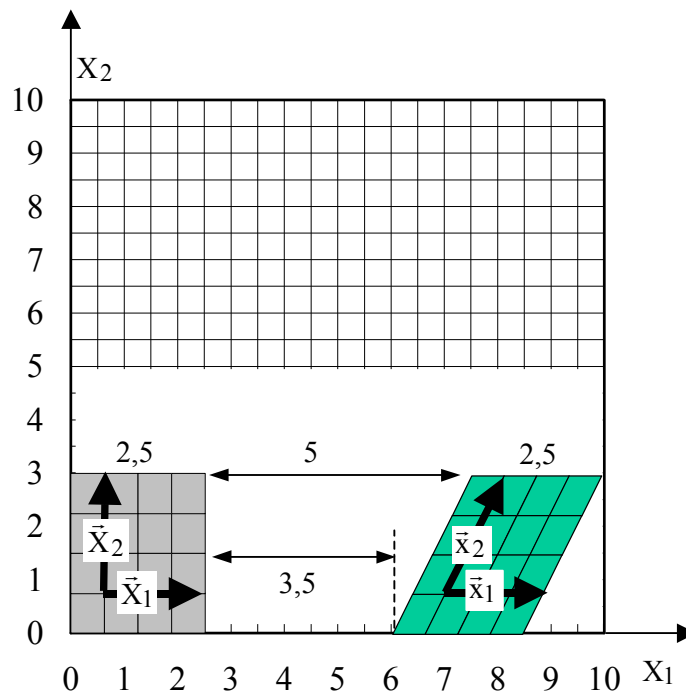


Figure 3 : Exemple de transformation particulière : glissement simple avec translation

### II.1.2. Exemple

La figure 3 montre une transformation particulière. Le solide entier est d'abord translaté de 3,5 unités dans la direction  $x_1$ . Puis une transformation appelée glissement simple est appliquée. La partie supérieure est translatée de 2 unités dans la direction  $x_1$  alors que la partie inférieure ne bouge plus. La transformation peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2,5 + 2X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La translation de 2,5 unités dans la direction des  $x_1$  positif n'intervient pas dans le tenseur gradient de la transformation. Dans la suite, un mouvement d'ensemble d'un solide sera appelé mouvement rigide ou mode rigide. Les coordonnées  $x_2$  et  $x_3$  ne sont pas affectées par la transformation. Dans le tenseur gradient de la transformation cela se traduit par une valeur unitaire sur la diagonale principale. Le tenseur gradient de cette transformation ne dépend pas des coordonnées de la configuration initiale. Ce type de transformations est appelé transformation homogène.

### II.1.3. Transformations homogènes

Si le tenseur  $\underline{\underline{F}}$  ne dépend pas du point matériel  $P_0$ , la transformation est dite homogène.

*transformation homogène :*  
 $\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{X}, t) = \underline{\underline{F}}(t)\bar{X} + \bar{B}(t)$   
 $x_i = \Phi_i(X_1, X_2, X_3, t) = F_{ij}(t)X_j + B_i(t)$

(3)

La relation (1) s'écrit dans le cas d'une transformation homogène  $\overrightarrow{P_t Q_t} = \underline{\underline{F}}(t) \overrightarrow{P_0 Q_0}$   
 La fonction  $\bar{\alpha}$  est identiquement nulle.

### II.1.4. Interprétation géométrique du tenseur gradient

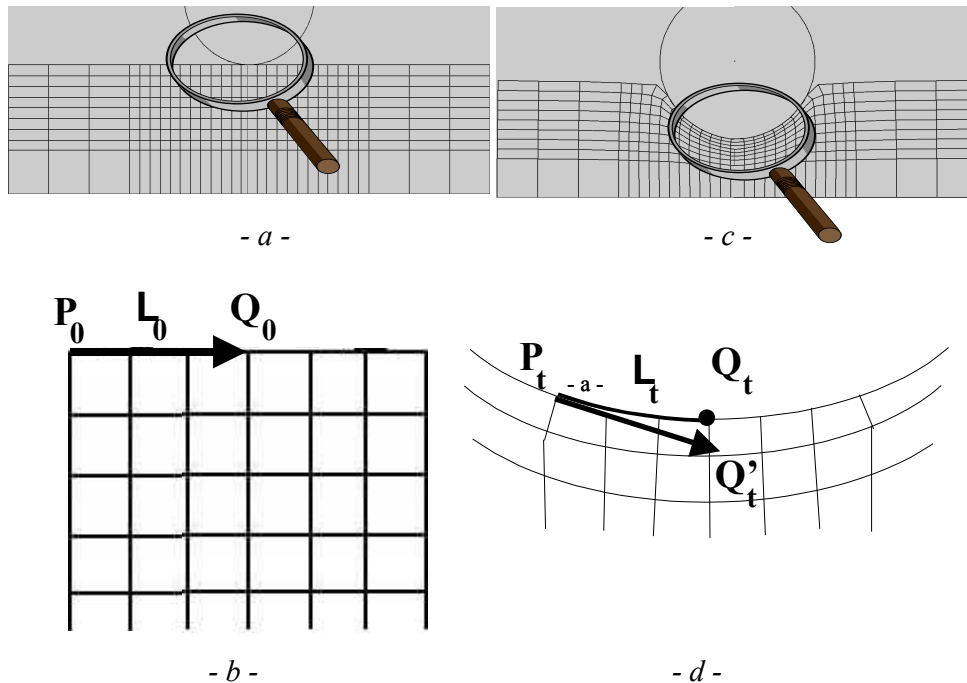


Figure 4: Indentation d'un solide par un cylindre infini en configuration non déformée prise comme référence (a et b) et configuration déformée (c et d).

La figure 4 montre l'indentation d'un solide par un cylindre indéformable. Les figures 4a et 4b correspondent à la configuration non déformée. Cette configuration sera adoptée comme configuration initiale  $C_0$ . Les figures 4c et 4d correspondent à la configuration



déformée, soit  $C(t)$ . Le segment de droite  $L_0 = P_0Q_0$  de la configuration initiale se transforme un arc de courbe  $L_t = P_tQ_t$  dans la configuration  $C(t)$ . Considérons la formule (1)

$$\overrightarrow{P_tQ_t} = \underline{\underline{F}}(\overrightarrow{0P_0}, t) \overrightarrow{P_0Q_0} + \bar{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t) \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$$

Posons  $\overrightarrow{P_tQ'_t} = \underline{\underline{F}}(\overrightarrow{0P_0}, t) \overrightarrow{P_0Q_0}$ . On peut écrire :  $\overrightarrow{P_tQ_t} = \overrightarrow{P_tQ'_t} + \bar{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t) \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$ .

Comme  $\bar{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t)$  tend vers  $\vec{0}$  si  $\|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$  tend vers  $\vec{0}$  à  $t$  fixé, il apparaît que  $Q'_t$  sera voisin de  $Q_t$  si  $Q_0$  est voisin de  $P_0$ . Une des idées fondamentales de la modélisation des déformations d'un milieu continu est d'approcher le vecteur  $\overrightarrow{P_tQ_t}$  par le vecteur  $\overrightarrow{P_tQ'_t}$ . On appelle transporté du vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_0}$  à l'instant  $t$ , le vecteur  $\overrightarrow{P_tQ'_t}$ . Il ne faut pas confondre le transporté de  $\overrightarrow{P_0Q_0}$ , qui est un vecteur avec le transformé du segment  $L_0=P_0Q_0$  par l'application  $F$  qui la courbe  $L_t$ .

*transporté du vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_0}$*

$$\overrightarrow{P_tQ'_t} = \underline{\underline{F}}(\overrightarrow{0P_0}, t) \overrightarrow{P_0Q_0}$$

$$\overrightarrow{P_tQ_t} = \overrightarrow{P_tQ'_t} + \bar{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t) \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$$

(4)

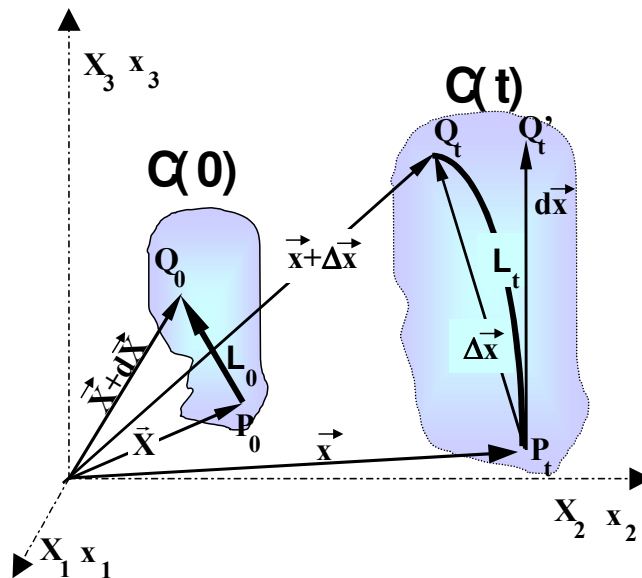


Figure 5: Passage de la représentation pour des quantités finies à des quantités différentielles.

### II.1.5. Notations différentielles

L'équation (1) est exacte quelle que soit la longueur du vecteur  $\overline{P_0 Q_0}$ . Toutefois le vecteur  $\overline{P_t Q'_t} = \underline{\underline{F}}(\overline{P_0}, t) \overline{P_0 Q_0}$  ne sera une bonne approximation du vecteur  $\overline{P_t Q_t}$  que si  $Q_0$  est proche de  $P_0$ . Dans la suite, nous considérons que les points  $P_0$  et  $Q_0$  sont infiniment proche, soit :  $\overline{P_0 Q_0} = d\vec{X}$ ,  $\overline{P_t Q'_t} = d\vec{x}$ . Si l'on pose (Figure 5)  $\overline{P_t Q_t} = \overline{OQ_t} - \overline{OP_t} = \vec{y} - \vec{x} = \Delta\vec{x}$  et  $\overline{P_0 Q_0} = \overline{OQ_0} - \overline{OP_0} = \vec{Y} - \vec{X} = d\vec{X}$ , l'équation (4) devient :

$$\Delta\vec{x} = d\vec{x} + \vec{\alpha}(d\vec{X}) \|d\vec{X}\| \quad (5)$$

Confondre le vecteur  $\overline{P_t Q_t}$  avec  $\overline{P_t Q'_t}$  revient donc à approcher l'accroissement  $\Delta\vec{x}$  de la fonction  $\vec{\Phi}(\vec{X}, t)$  par le vecteur  $d\vec{x}$ .

### II.1.6. Tenseur inverse du tenseur gradient d'une transformation

Considérons les dérivées partielles suivantes :

$$\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_j}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). L'inverse du tenseur  $\underline{\underline{F}}$  est donc donné par :

$$G_{ij} = (F^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

## II.2. Transport convectif

### II.2.1. Eléments d'arc, élément de surface, élément de volume

Dans la configuration de référence  $C_0$ , soit un arc de courbe  $L_0$  passant par  $P_0$ . Au voisinage du point  $P_0$  on peut approcher cet arc par le vecteur tangent  $d\vec{X}$ .  $d\vec{X}$  sera appelé vecteur élémentaire. Un élément de surface élémentaire  $dS_0$  sera un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs élémentaires  $d\vec{X}$  et  $d\vec{X}'$  issus de  $P_0$ . Un élément de volume élémentaire  $dV_0$  est un parallélépipède construit à partir de trois vecteurs élémentaires  $d\vec{X}$ ,

$d\bar{X}'$  et  $d\bar{X}''$ . Dans la configuration actuelle  $C(t)$ , le transporté  $L_t$  de l'arc  $L_0$  sera confondu avec le vecteur  $d\bar{x}$ , transporté du vecteur  $d\bar{X}$ . Le transporté  $dS_t$  de la surface  $dS_0$  sera confondu avec la surface portée par les vecteurs  $d\bar{x}$  et  $d\bar{x}'$ , transportés de  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$ .

### II.2.2. Transport convectif d'un vecteur élémentaire

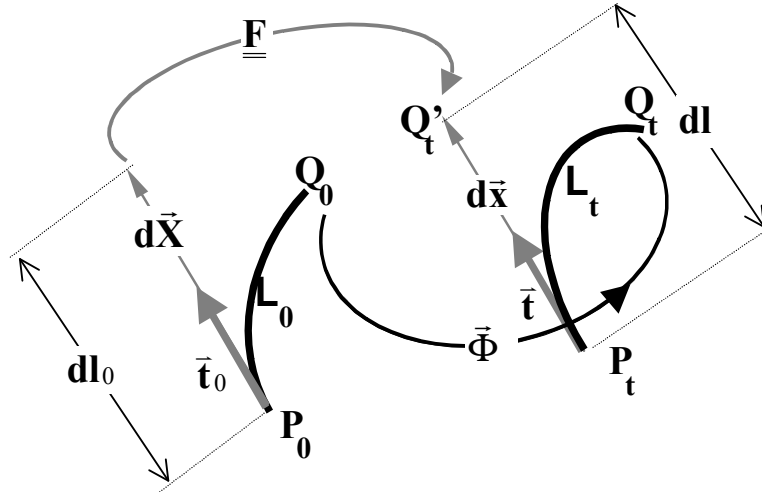


Figure 6 : transport d'un vecteur élémentaire

Considérons un arc de courbe  $L_0$  passant par les points  $P_0$  et  $Q_0$  (Figure 6) dans la configuration de référence. Dans la configuration actuelle, l'arc de courbe  $L_0$  se transforme dans l'arc de courbe  $L_t$  passant par  $P_t$   $Q_t$ . Cet arc de courbe sera approché par le transporté du vecteur  $d\bar{X}$  soit  $d\bar{x}$ . Introduisons les vecteurs unitaires  $\bar{t}_0$  et  $\bar{t}$  tels que  $d\bar{X} = dl_0 \bar{t}_0$  et  $d\bar{x} = dl \bar{t}$ . Comme  $d\bar{x} = \underline{\underline{F}} d\bar{X}$ , on peut écrire :

$$\bar{t} dl = \underline{\underline{F}} \bar{t}_0 dl_0 \quad (7)$$

### II.2.2. Transport convectif d'une surface élémentaire

Soit  $dS_0$  une surface élémentaire construite à partir de deux vecteurs élémentaires  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$ . Si  $dA_0$  désigne l'aire de  $dS_0$  et  $\bar{n}_0$  la normale unitaire à  $dS_0$  on a :

$$\bar{n}_0 dA_0 = d\bar{X} \wedge d\bar{X}'$$

La surface transportée  $dS$  construite à partir des vecteurs  $d\bar{x} = \underline{\underline{F}} d\bar{X}$  et  $d\bar{x}' = \underline{\underline{F}} d\bar{X}'$  est dite surface transportée de  $dS_0$ . Pour obtenir la relation entre  $dS$  et  $dS_0$ , nous exprimons le produit

vectoriel sous forme indicielle.  $\vec{n}dA = d\vec{x} \wedge d\vec{x}'$  peut s'écrire en notation indicielle, sous la forme  $n_i dA = \varepsilon_{ijk} dx_j dx'_k$ , où est le symbole d'antisymétrie (Annexe 1) défini comme suit :

- $\varepsilon_{ijk} = 0$  si deux ou trois indices sont égaux ;
- $\varepsilon_{ijk} = 1$  si  $i, j, k$  constituent une permutation paire de (1,2,3) ;
- $\varepsilon_{ijk} = -1$  si  $i, j, k$  constituent une permutation impaire de (1,2,3).

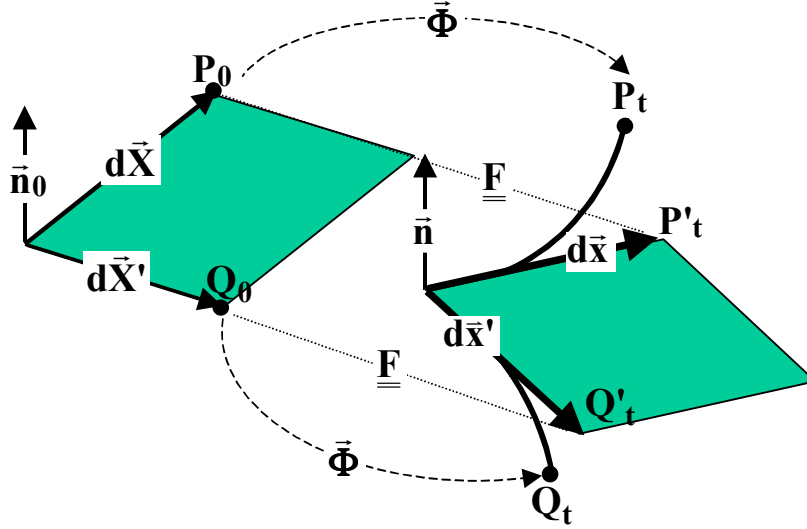


Figure 7: Transport d'un élément de surface

En remplaçant  $d\vec{x}$  par  $\underline{\underline{F}}d\vec{X}$  ( $dx'_j = F_{jq} dX'_q$ ) et  $d\vec{x}'$  par  $\underline{\underline{F}}d\vec{X}'$  ( $dx'_k = F_{kr} dX'_r$ ) dans la relation précédente, on obtient

$$n_i dA = \varepsilon_{ijk} (F_{jq} dX_q) (F_{kr} dX'_r)$$

Pour faire apparaître l'expression du déterminant de  $\underline{\underline{F}}$ , nous multiplions les deux côtés de l'expression par  $F_{ip}$  et sommons sur l'indice  $i$ .

$$F_{ip} n_i dA = \varepsilon_{ijk} F_{ip} F_{jq} F_{kr} dX_q dX'_r$$

Or  $\varepsilon_{ijk} F_{ip} F_{jq} F_{kr} = \varepsilon_{pqr} \det(\underline{\underline{F}}) = \varepsilon_{pqr} J$  (Annexe 1), donc

$$F_{ip} n_i dA = \varepsilon_{pqr} J dX_q dX'_r .$$

Cette relation permet d'exprimer  $dA$  en fonction de  $dA_0$  et  $\vec{n}_0$ . En effet,  $d\vec{X} \wedge d\vec{X}' = \vec{n}_0 dA_0$  s'écrit en notations indicelles  $n_{0p} dA_0 = \varepsilon_{pqr} dX_q dX'_r$ . Ce qui permet d'écrire :

$$F_{ip} n_i dA = J n_{0p} dA_0$$

$$F_{ip} n_i = F_{pi}^T n_i = \left[ \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{n}} \right]_p .$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{n}} dA = J \underline{\underline{n}}_0 dA_0, \text{ soit}$$

$$\underline{\underline{n}} dA = J \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{n}}_0 dA_0 \quad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (8)$$

Dans la configuration de référence  $C_0$ , soit un arc de courbe  $L_0$  passant par  $P_0$ . Au voisinage du point  $P_0$  on peut approcher cet arc par le vecteur tangent  $d\vec{X}$ .  $d\vec{X}$  sera appelé  $d\vec{X}$  et  $d\vec{X}'$   $P_0$ .  $dV_0$   $d\vec{X}$ ,  $d\vec{X}'$  et  $C(t)$ , le transporté  $L_t$  de l'arc  $L_0$  sera confondu avec le vecteur  $d\vec{x}$ , transporté du vecteur  $d\vec{X}$ . Le transporté  $dS_t$  de la surface  $dS_0$  sera confondu avec la surface portée par les vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$ , transportés de  $d\vec{X}$  et  $d\vec{X}'$ .

### III. TENSEUR DES DILATATIONS

Considérons de nouveau le problème de l'indentation d'un solide par un cylindre infini (Figure 9). Nous proposons de comparer les longueurs et les angles dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle. La variation de longueur dépend de l'orientation du segment considéré dans la configuration de référence. La mesure la plus adéquate à notre problème semble donc être le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires. En effet, le produit scalaire tient compte de l'orientation relative des vecteurs. Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même permet d'estimer les longueurs. Le produit scalaire de deux vecteurs différents permet d'estimer l'angle formé par ces vecteurs.

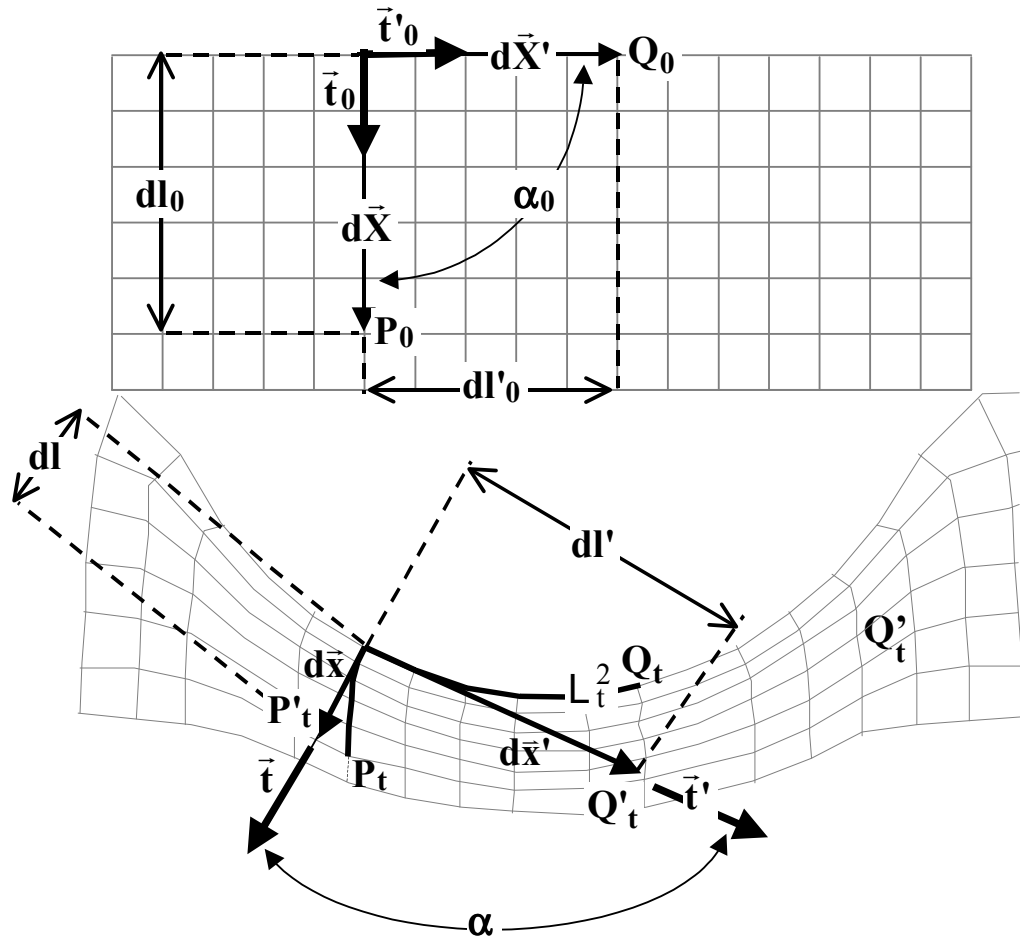


Figure 9: Indentation d'un solide par un cylindre infini. Configuration de référence et configuration déformée.

### III.1. Tenseur des dilatations

#### III.1.1. Définition

$$\begin{aligned} \text{Calculons donc } d\bar{\underline{x}}^T \cdot d\bar{\underline{x}}' &= (\underline{\underline{F}}d\bar{\underline{X}})^T \underline{\underline{F}}d\bar{\underline{X}}' \\ d\bar{\underline{x}}^T \cdot d\bar{\underline{x}}' &= d\bar{\underline{X}}^T \left[ \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right] d\bar{\underline{X}}' \\ d\bar{\underline{x}}^T \cdot d\bar{\underline{x}}' &= d\bar{\underline{X}}^T \left[ \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right] d\bar{\underline{X}}' = d\bar{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}} d\bar{\underline{X}}' \end{aligned}$$

tenseur des dilatations de Cauchy – Green

$$d\bar{\underline{x}}^T \cdot d\bar{\underline{x}}' = d\bar{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}} d\bar{\underline{X}}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad (9)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$  est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green. Ce tenseur dépend de la configuration initiale et permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans la position actuelle en fonction du produit scalaire des vecteurs correspondants dans la configuration initiale. Comme, en tant que forme linéaire, il s'applique sur deux vecteurs relatifs à la configuration initiale, on dira que  $\underline{\underline{C}}$  est un tenseur lagrangien. Les composantes du tenseur  $\underline{\underline{C}}$  sont adimensionnelles.

#### III.1.2. Propriétés du tenseur des dilatations de Cauchy-Green

$\underline{\underline{C}}$  est symétrique (i.e. égal sont transposé). En effet :

$$\underline{\underline{C}}^T = \left( \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right)^T = \underline{\underline{F}} \left( \underline{\underline{F}}^T \right)^T = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}}$$

La forme bilinéaire  $\bar{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{X}}$  est définie positive. En effet,

$$\det[\underline{\underline{C}}] = \det \left[ \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right] = (\det \underline{\underline{F}})^2 = J^2 > 0 \quad \text{et} \quad d\bar{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}} d\bar{\underline{X}} = \|d\bar{\underline{x}}\|^2 > 0$$

#### III.1.3. tenseur des dilatations de Cauchy-Green à gauche

Calculons le produit scalaire des vecteurs  $d\bar{\underline{X}}$  et  $d\bar{\underline{X}}'$  en fonction des vecteurs  $d\bar{\underline{x}}$  et  $d\bar{\underline{x}}'$  :

$$d\bar{\underline{X}}^T d\bar{\underline{X}}' = (\underline{\underline{G}}d\bar{\underline{x}})^T \underline{\underline{G}}d\bar{\underline{x}}' = d\bar{\underline{x}}^T \left[ \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \right] d\bar{\underline{x}}'$$

Définissons le tenseur de Cauchy-Green à gauche par :

tenseur des dilatations de Cauchy – Green à gauche

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T$$

(10)

L'inverse du tenseur de Cauchy-Green à gauche, permettra de calculer les dilatations en nous basant sur des vecteurs de la configuration actuelle :

$$\underline{\underline{\mathbf{c}}} = (\underline{\underline{\mathbf{B}}})^{-1} = [\underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T]^{-1} = [\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1}]^T \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}} \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{X}}^T d\vec{\mathbf{X}}' &= d\vec{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} d\vec{\mathbf{x}}' \\ \underline{\underline{\mathbf{c}}} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}} \end{aligned}$$

(11)

Comme le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , les tenseurs  $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  sont symétriques et définis-positifs. En tant que forme linéaire,  $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$  s'applique à deux vecteurs relatifs à la configuration actuelle. Nous dirons que  $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$  est un tenseur eulérien.

### III.2. Dilatation dans une direction

Sur la figure 9, les dilatations dépendent de l'orientation du segment considéré dans la configuration de référence. La dilatation  $\lambda$  dans une direction  $d\vec{\mathbf{X}}$ , donne le rapport de la longueur du segment dans la configuration actuelle par rapport à la longueur du segment dans la configuration de référence.

$$\lambda(d\vec{\mathbf{X}}) = \frac{\|d\vec{\mathbf{x}}\|}{\|d\vec{\mathbf{X}}\|} = \frac{\sqrt{d\vec{\mathbf{X}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} d\vec{\mathbf{X}}}}{\|d\vec{\mathbf{X}}\|}$$

En exprimant,  $d\vec{\mathbf{X}}$  et  $d\vec{\mathbf{x}}$  en fonction des vecteurs unitaires  $\vec{\mathbf{t}}_0$  et  $\vec{\mathbf{t}}$  sous la forme  $d\vec{\mathbf{X}} = dl_0 \vec{\mathbf{t}}_0$  et  $d\vec{\mathbf{x}} = dl \vec{\mathbf{t}}$ , nous obtenons pour la dilatation

$$\lambda(d\vec{\mathbf{X}}) = \frac{\|d\vec{\mathbf{x}}\|}{\|d\vec{\mathbf{X}}\|} = \frac{dl}{dl_0} = \frac{\sqrt{d\vec{\mathbf{X}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} d\vec{\mathbf{X}}}}{dl_0} = \frac{\sqrt{dl_0 \vec{\mathbf{t}}_0^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \vec{\mathbf{t}}_0 dl_0}}{dl_0} \quad \text{soit}$$

$$\lambda(d\vec{\mathbf{X}}) = \sqrt{\vec{\mathbf{t}}_0^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \vec{\mathbf{t}}_0} = \sqrt{\vec{\mathbf{t}}_0^T \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} \vec{\mathbf{t}}_0} = \sqrt{(\underline{\underline{\mathbf{F}}} \vec{\mathbf{t}}_0)^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} \vec{\mathbf{t}}_0} = \|\underline{\underline{\mathbf{F}}} \vec{\mathbf{t}}_0\|$$



Dilatation dans une direction

$$\lambda(d\bar{X}) = \lambda(\bar{t}_0) \begin{cases} = \sqrt{\bar{t}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{t}_0} \\ = \frac{dl}{dl_0} \\ = \left\| \underline{\underline{F}} \bar{t}_0 \right\| \end{cases} \quad (12)$$

Si l'on connaît le tenseur  $\underline{\underline{C}}$  au point  $P_0$ , on peut donc calculer la dilatation  $\lambda$  dans n'importe quelle direction  $d\bar{X}$  autour de  $P_0$ .  $\lambda$  dépend non seulement de la direction de  $d\bar{X}$ , mais aussi du point  $P_0$  et de l'instant  $t$ . C'est une notion locale, comme le tenseur  $\underline{\underline{C}}$ . On utilise le terme dilatation dans la direction  $\bar{t}_0$  même si  $\lambda(\bar{t}_0)$  est inférieur à 1. Dans ce cas la déformation est appelée une contraction dans le langage courant. Si  $\bar{t}_0$  correspond à un vecteur de base  $\bar{e}_i$ , on a :  $\lambda(d\bar{X}) = \sqrt{\bar{e}_i^T \underline{\underline{C}} \bar{e}_i} = \sqrt{C_{ii}}$ . Le fait de souligner l'indice muet  $i$ , signifie qu'il n'y a pas de sommation.

### III.3. Glissement de deux directions orthogonales

Sur la figure 9, un réseau de lignes est dessiné sur la configuration de référence. Les vecteurs  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$  forment un angle  $\alpha_0$  dans la configuration de référence. Dans la configuration actuelle, les vecteurs  $d\bar{x}$  et  $d\bar{x}'$  forment un angle  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}^T d\bar{x}'}{\|d\bar{x}\| \|d\bar{x}'\|} = \frac{(\underline{\underline{F}} d\bar{X})^T \underline{\underline{F}} d\bar{X}'}{\sqrt{(d\bar{X}^T \underline{\underline{C}} d\bar{X})} \sqrt{(d\bar{X}'^T \underline{\underline{C}} d\bar{X}')}}$$

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}^T d\bar{x}'}{\|d\bar{x}\| \|d\bar{x}'\|} = \frac{d\bar{X}^T (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}) d\bar{X}'}{\sqrt{(d\bar{X}^T \underline{\underline{C}} d\bar{X})} \sqrt{(d\bar{X}'^T \underline{\underline{C}} d\bar{X}')}}$$

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}^T d\bar{x}'}{\|d\bar{x}\| \|d\bar{x}'\|} = \frac{(dl_0 \bar{t}_0)^T (\underline{\underline{C}}) (dl'_0 \bar{t}'_0)}{\sqrt{[(dl_0 \bar{t}_0)^T \underline{\underline{C}} (dl_0 \bar{t}_0)]} \sqrt{[(dl'_0 \bar{t}'_0)^T \underline{\underline{C}} (dl'_0 \bar{t}'_0)]}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}}^T \underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}'}}{\|\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}}\| \|\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}'}} = \frac{\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}_0} \underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}'}}{\sqrt{\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}_0} \underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}}} \sqrt{\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}'}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}_0'} \underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}'}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}}^T \underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}'}}{\|\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}}\| \|\underline{\underline{\bar{\mathbf{x}}}'}} = \frac{\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}_0} \underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}'}}{\lambda(\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}}) \lambda(\underline{\underline{\bar{\mathbf{t}}_0}'})}$$

(13)

## IV. DEFORMATIONS

### IV.1. Tenseurs des déformations

#### IV.1.1. Tenseur de Green-Lagrange

$$\begin{aligned} d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= d\bar{X}^T \underline{\underline{C}} d\bar{X}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' \\ \underline{\underline{Id}}\bar{X} &= d\bar{X}' \\ d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= d\bar{X}^T \underline{\underline{C}} d\bar{X}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' = d\bar{X}^T \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}} \right) d\bar{X}' \\ d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= 2 d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}' \end{aligned}$$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}} \right) \quad (14)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  est symétrique comme le tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$ . Comme  $\underline{\underline{C}}^T = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ , on peut exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange en fonction du tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  :

Tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \right) \quad (15)$$

Exprimé en fonctions des composantes dans la base R nous obtenons :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

Comme celles des tenseurs  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{C}}$ , les composantes du tenseur  $\underline{\underline{E}}$  sont sans dimensions.

#### IV.1.2. Tenseur d'Euler-Almansi

On peut aussi exprimer la déformation en fonction des variables de configuration actuelle :

$$\begin{aligned} d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= d\bar{x}^T d\bar{x}' - (\underline{\underline{F}}^{-1} d\bar{x})^T (\underline{\underline{F}}^{-1} d\bar{x}') \\ &= d\bar{x}^T d\bar{x}' - (d\bar{x})^T (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \underline{\underline{F}}^{-1} d\bar{x}' \\ &= d\bar{x}^T d\bar{x}' - (d\bar{x})^T (\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T)^{-1} d\bar{x}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= d\bar{x}^T d\bar{x}' - (d\bar{x})^T \underline{\underline{B}}^{-1} d\bar{x} \\ &= d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{x}^T \underline{\underline{c}} d\bar{x}' \\ d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' &= d\bar{x}^T \left[ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{c}} \right] d\bar{x}' \end{aligned}$$

Tenseur des déformations d'Euler – Almansi

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{c}} \right]$$

(16)

$$d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' = 2 d\bar{x}^T \underline{\underline{e}} d\bar{x}'$$

Tout comme  $\underline{\underline{c}}$ , le tenseur des déformations d'Euler-Almansi  $\underline{\underline{e}}$  est eulérien puisqu'en forme bilinéaire il s'applique sur les vecteurs et relatifs à la configuration actuelle. Les composantes du tenseur  $\underline{\underline{e}}$  dans la base R sont :

$$d_{x_i} d_{x_i}' - d_{X_m} d_{X_m}' = 2 e_{rs} d_{x_r} d_{x_s}'$$

$$d_{x_i} d_{x_i}' - d_{X_m} d_{X_m}' = 2 e_{pq} d_{x_q} d_{x_q}'$$

$$d_{x_j} d_{x_j}' - d_{X_m} d_{X_m}' = 2 e_{pq} d_{x_q} d_{x_q}'$$

$$d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' = 2 d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}'$$

#### IV.1.3. Relation entre le tenseur de Green-Lagrange et le tenseur d'Euler-Almansi

Pour obtenir la relation entre le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  et le tenseur des déformations d'Euler-Almansi  $\underline{\underline{e}}$ , nous exprimons la différence des produits scalaires dans la configuration actuelle et la configuration de référence en fonction de ces deux tenseurs :

$$d\bar{x}^T d\bar{x}' - d\bar{X}^T d\bar{X}' = 2 d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}' = 2 d\bar{x}^T \underline{\underline{e}} d\bar{x}'$$

Nous exprimons le membre de droite de cette égalité en fonction de  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$ . Ceci conduit à une égalité de deux formes linéaires qui ne dépendent plus que de  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$  :

$$d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}' = d\bar{x}^T \underline{\underline{e}} d\bar{x}' \text{ soit comme } d\bar{x} = \underline{\underline{F}} d\bar{X} \text{ et } d\bar{x}' = \underline{\underline{F}} d\bar{X}'$$

$$d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}' = (\underline{\underline{F}} d\bar{X})^T \underline{\underline{e}} (\underline{\underline{F}} d\bar{X}') = d\bar{X}^T \left[ \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}} \right] d\bar{X}'$$

L'égalité précédente est vraie pour tout vecteur  $d\bar{X}$  et tout vecteur  $d\bar{X}'$ . Ceci conduit à l'égalité des deux tenseurs :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{e}} &= \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{G}} \end{aligned} \quad (17)$$

Il est important de retenir la démarche adoptée pour démontrer l'égalité de deux tenseurs. Nous avons montré que les formes linéaires associées à ces tenseurs sont égales pour tous les vecteurs considérés.

## IV.2. Déformation dans une direction , allongement unitaire dans une direction, glissement de deux directions orthogonales

### IV.2.1. Déformation dans une direction

Nous calculons la variation de longueur d'un segment entre la configuration de référence et la configuration actuelle par :

$$d\bar{x}^T d\bar{x} - d\bar{X}^T d\bar{X} = 2d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X} \text{ soit}$$

$$\|d\bar{x}\|^2 - \|d\bar{X}\|^2 = 2d\bar{X}^T \underline{\underline{E}} d\bar{X}$$

$$\|dl\|^2 - \|dl_0\|^2 = 2(dl_0 \bar{t}_0)^T \underline{\underline{E}} (dl_0 \bar{t}_0) = 2dl_0^2 (\bar{t}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{t}_0)$$

$$\frac{\|dl\|^2 - \|dl_0\|^2}{dl_0^2} = 2(\bar{t}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{t}_0)$$

Cette équation permet de relier la dilatation  $\lambda$  à la déformation E, en effet :

$$\lambda^2 = \frac{dl^2}{dl_0^2} = 1 + \frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 1 + 2(\bar{t}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{t}_0)$$

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\underline{\underline{E}} (\bar{t}_0, \bar{t}_0)} \quad (18)$$

#### IV.2.2. Allongement unitaire dans une direction

##### Définition

Toujours dans le but de comparer l'état du solide à l'instant actuel et dans la configuration de référence, on peut évaluer la variation relative de longueur que subit le vecteur  $d\bar{X}$  au cours de la transformation.

Définition de l'allongement unitaire dans la direction  $d\bar{X}$

$$\delta(d\bar{X}) = \frac{\|d\bar{x}\| - \|d\bar{X}\|}{\|d\bar{X}\|} = \frac{dl - dl_0}{dl_0}$$

L'allongement unitaire dépend de la direction de  $d\bar{X}$  soit  $\bar{t}_0$ . L'allongement unitaire peut être relié à la dilatation  $\lambda(\bar{t}_0)$  et la  $\underline{\underline{E}}(\bar{t}_0, \bar{t}_0)$  déformation dans la direction  $\bar{t}_0$ . En effet :

$$\delta(\bar{t}_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{dl}{dl_0} - 1$$

donc

$$\begin{aligned} \delta(\bar{t}_0) &= \lambda(\bar{t}_0) - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2\underline{\underline{E}}(\bar{t}_0, \bar{t}_0)} - 1 \end{aligned} \quad (19)$$

#### IV.2.3. Glissement de deux directions orthogonales

On peut exprimer le glissement de deux directions orthogonales  $d\bar{X}$  et  $d\bar{X}'$  définies par les vecteurs unitaires  $\bar{t}_0$  et  $\bar{t}'_0$  à l'aide du tenseur  $\underline{\underline{E}}$ . La formule (13) donne en effet pour deux vecteurs quelconques de la configuration de référence  $\bar{t}_0$  et  $\bar{t}'_0$  :

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}^T d\bar{x}'}{\|d\bar{x}\| \|d\bar{x}'\|} = \frac{\bar{t}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{t}'_0}{\lambda(\bar{t}_0) \lambda(\bar{t}'_0)}$$

L'expression de la dilatation  $l$  en fonction du tenseur des dilatations de Cauchy-Green donne  $\lambda(\bar{t}_0) = \sqrt{\bar{t}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{t}_0}$  pour le vecteur  $\bar{t}_0$  et  $\lambda(\bar{t}'_0) = \sqrt{\bar{t}'_0^T \underline{\underline{C}} \bar{t}'_0}$  pour le vecteur  $\bar{t}'_0$ . Ainsi  $\cos(\alpha)$  s'écrit :

$$\cos \alpha = \frac{\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}{\sqrt{\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{t}}}_0} \sqrt{\bar{\underline{\underline{t}}}'_0^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}}$$

L'expression (14) du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  en fonction du tenseur des dilatations Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$  permet d'écrire :

$$\cos \alpha = \frac{\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T (2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}) \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}{\sqrt{\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T (2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}) \bar{\underline{\underline{t}}}_0} \sqrt{\bar{\underline{\underline{t}}}'_0^T (2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}) \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}} = \frac{2\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0 + \bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}{\sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}_0} \sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{t}}}'_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}}. \text{ Or } \bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \bar{\underline{\underline{t}}}'_0 = 0, \text{ donc :}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}{\sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{t}}}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}_0} \sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{t}}}'_0^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{t}}}'_0}} \quad (20)$$

Dans le cas particulier où les vecteurs  $\bar{\underline{\underline{t}}}_0$  et  $\bar{\underline{\underline{t}}}'_0$  correspondent à des vecteurs de la base dans la configuration de référence, on a  $\bar{\underline{\underline{t}}}_0 = \bar{\underline{\underline{e}}}_i$  et  $\bar{\underline{\underline{t}}}'_0 = \bar{\underline{\underline{e}}}_j$  ( $i \neq j$ ) :

$$\cos \alpha = \frac{2\bar{\underline{\underline{e}}}_i^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{e}}}_j}{\sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{e}}}_i^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{e}}}_i} \sqrt{1 + 2\bar{\underline{\underline{e}}}_j^T \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{e}}}_j}} = \frac{2E_{ij}}{\sqrt{1 + 2E_{ii}} \sqrt{1 + 2E_{jj}}}$$

où l'indice muet souligné ne donne pas lieu à sommation.

**V. FORMULATION EN FONCTION DES DEPLACEMENTS**

**V.1. Tenseur gradient du déplacement**

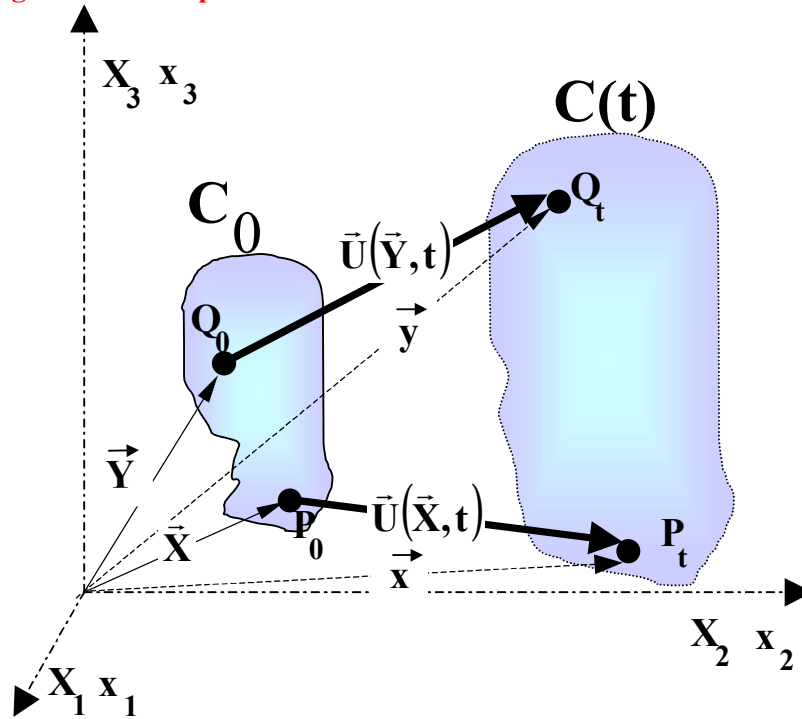


Figure 10: Configuration initiale  $C_0$  et actuelle  $C(t)$  d'un solide avec représentation des vecteurs déplacements.

**V.1.1. Définition**

On appelle déplacement du point matériel  $P$  à l'instant  $t$ , le vecteur

$$\bar{U}(\bar{X}, t) = \overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = \bar{x}(\bar{X}, t) - \bar{X}$$

Le tenseur gradient du déplacement est défini dans la configuration de référence par

$$\underline{\underline{H}} = \overline{grad} [\bar{U}(\bar{X}, t)] \text{ soit } H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad (21)$$

Les composantes du tenseur  $\underline{\underline{H}}$  sont adimensionnelles, car  $\bar{U}$  et  $\bar{X}$  ont la dimension d'une longueur. Comme  $\bar{U}(\bar{X}, t) = \bar{x}(\bar{X}, t) - \bar{X}$ , le tenseur gradient du déplacement  $\underline{\underline{H}}$  est lié au tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  par :

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \quad (22)$$



En effet,  $\underline{\underline{H}} = \overline{\text{grad}}[\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{X}}, t)] = \overline{\text{grad}}[\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}, t) - \underline{\underline{X}}] = \overline{\text{grad}}[\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}, t)] - \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}$ .

**V.1.2. Décomposition du tenseur gradient du déplacement  $\underline{\underline{H}}$  en partie symétrique et antisymétrique  $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$**

Tout tenseur  $\underline{\underline{A}}$  du second ordre peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique  $\underline{\underline{A}}^s$  et d'un tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{A}}^a$  :  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^s + \underline{\underline{A}}^a$ . Le tenseur symétrique  $\underline{\underline{A}}^s$  et le tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{A}}^a$  sont donnés par :

$$\underline{\underline{A}}^s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T) \text{ et } \underline{\underline{A}}^a = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T).$$

L'application de cette décomposition sur le tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$ , permet d'introduire le tenseur petites déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et le tenseur petites rotations  $\underline{\underline{\omega}}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T) \text{ et } \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{H}}^T). \quad (23)$$

En composantes dans la base R, il vient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \text{ et } \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (24)$$

**V.1.3. Expression des tenseurs  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  en fonction du tenseur  $\underline{\underline{H}}$   
Expression du tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$  en fonction du tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$**

Comme  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}}$  on a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \left( \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}}^T \right) \left( \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}} \right) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T + \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \\ \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \end{aligned}$$

Expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  en fonction du tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$

Comme  $\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})/2$  on a

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \quad (25)$$

## V.2. Décomposition du déplacement

### V.2.1. Base principale de la déformation. Dilatations principales

Soit  $P_0$  un point de la configuration initiale. Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$  est symétrique et donc diagonalisable. La base formée par les vecteurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  est dite base principale de la déformation. En effet, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  a les mêmes vecteurs propres que le tenseur des dilatations  $\underline{\underline{C}}$ . Soient  $\bar{\underline{\underline{B}}}_1$ ,  $\bar{\underline{\underline{B}}}_2$  et  $\bar{\underline{\underline{B}}}_3$  les vecteurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  les valeurs propres correspondantes, alors on a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i &= \mu_i \bar{\underline{\underline{B}}}_i \\ \underline{\underline{E}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \bar{\underline{\underline{B}}}_i = \left( \frac{\mu_i}{2} - 1 \right) \bar{\underline{\underline{B}}}_i \end{aligned}$$

Comme  $\underline{\underline{C}}$  est symétrique défini positif, les valeurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  sont réelles et positives. En effet

$$\underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i = \mu_i \bar{\underline{\underline{B}}}_i \quad (i=1,2,3)$$

donne après multiplication par  $\bar{\underline{\underline{B}}}_i$  :

$$\bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i = \mu_i \bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \bar{\underline{\underline{B}}}_i = \mu_i \quad (i=1,2,3)$$

Le membre de gauche est défini positif par définition. Donc est positif.

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\underline{\underline{B}}}_i) &= \sqrt{\bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \underline{\underline{C}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i} = \mu_i \bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \bar{\underline{\underline{B}}}_i = \sqrt{\mu_i} \quad (i=1,2,3) \\ \bar{\underline{\underline{b}}}_i &= \underline{\underline{F}} \bar{\underline{\underline{B}}}_i \quad (i=1,2,3) \\ \bar{\underline{\underline{b}}}_i^T \bar{\underline{\underline{b}}}_j &= \bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \bar{\underline{\underline{B}}}_j \\ \bar{\underline{\underline{b}}}_i^T \bar{\underline{\underline{b}}}_j &= \bar{\underline{\underline{B}}}_i^T \mu_j \bar{\underline{\underline{B}}}_j \end{aligned}$$

$$\vec{b}_i^T \vec{b}_j = \mu_j \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_i^T \vec{b}_j &= 0 \text{ si } i \neq j \\ \|\vec{b}_i\|^2 &= \mu_i \quad \|\vec{b}_i\| = \lambda_i \end{aligned} \quad (26)$$

Soit

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \mu_1 = \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 = \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 = \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

**V.2.1. Déformations principales. Allongements unitaires principaux**

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  a les mêmes directions principales que le tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$ . On appelle déformations principales  $E_i$ , les valeurs propres de  $\underline{\underline{E}}$ . La relation qui lie une déformation principale à la dilation principale correspondante est :

$$E_i = \frac{1}{2}(\mu_i - 1) = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \geq -\frac{1}{2} \quad (i=1,2,3) \quad (27)$$

Les valeurs propres  $\mu_i$  du tenseur des dilatations sont définis positives, toute déformation principale  $E_i$  est strictement supérieure à  $-1/2$ . La matrice du tenseur  $\underline{\underline{E}}$  s'écrit dans la base principale :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & E_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & E_3 = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) \end{bmatrix}$$

L'allongement unitaire principal, est l'allongement des vecteurs propres  $\vec{B}_i$  lors du passage de la configuration de référence à la configuration actuelle :

$$\delta_i = \delta(\bar{\mathbf{B}}_i) = \lambda_i - 1 = \sqrt{\mu_i} - 1 = \sqrt{1 + 2E_i} - 1 \quad (28)$$

### V.2.2. Décomposition du gradient des déplacements en rotation et déformation

Considérons le point  $P_0$  de la configuration de référence et son transporté  $P_t$  dans la configuration actuelle. Intéressons-nous au tenseur gradient de la transformation au point  $P_0$  à l'instant  $t$ . Pour caractériser un tenseur du second ordre, considéré comme une application linéaire, il suffit de se donner les images des vecteurs d'une base. Pour la base principale de la transformation nous avons :

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\bar{\mathbf{B}}_i$$

Comme, les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux, on peut décomposer le tenseur de deux façons différentes indiquées sur la figure . Le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  considéré comme une application linéaire, transforme la base orthonormée  $\{\bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{B}}_2, \bar{\mathbf{B}}_3\}$  dans la base  $\{\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3\}$ , également orthonormée de même orientation. C'est donc une rotation, d'où le nom de tenseur rotation pour  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ . Le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  ne fait pas tourner la base principale. Il transforme chaque vecteur unitaire  $\bar{\mathbf{B}}_i$  en un vecteur colinéaire à lui-même et dont la norme est égale à celle de  $\bar{\mathbf{b}}_i$ . Les directions propres de  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  sont donc les directions principales de la déformation. On dit que  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  est associé à une déformation pure. Le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  représente également une déformation pure, mais ses directions propres ne sont plus les directions principales. Ce sont les directions définies par les vecteurs  $\bar{\mathbf{b}}_i = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\bar{\mathbf{B}}_i$ . Bien que n'admettant pas en général les mêmes directions propres,  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  ont mêmes valeurs propres  $\lambda_i = \|\bar{\mathbf{b}}_i\| = \sqrt{\mu_i}$ . Comme le produit contracté de deux tenseurs du second ordre correspond à la composition des applications linéaires, on peut écrire :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}} \quad (29)$$

Ce qui justifie les dénominations respectives des tenseurs des "déformations pures à droites" et "déformations pures à gauche" pour  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ . On dit aussi parfois "extension à droite" ou

“extension à gauche”. La matrice du tenseur  $\underline{\underline{U}}$  dans la base principale  $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3\}$  est diagonale :

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

C'est la même matrice que celle de  $\underline{\underline{V}}$  dans la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ . Une déformation pure transforme un vecteur de sa base principale en un vecteur colinéaire. Cependant, le transporté d'un vecteur quelconque ne sera pas colinéaire avec le vecteur d'origine si les trois dilatations principales ne sont pas égales. Un vecteur  $d\bar{X}$  quelconque peut donc subir une rotation lorsqu'il est soumis à une déformation pure.

### V.2.3. Expression de E et C en fonction de U

Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green s'écrit  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ . En fonction du tenseur de rotation  $\underline{\underline{R}}$  et du tenseur de déformation pure  $\underline{\underline{U}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}})^T \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}.$$

Or  $\underline{\underline{R}}$  est un tenseur de rotation. L'inverse de  $\underline{\underline{R}}$  est égale au transposé de  $\underline{\underline{R}}$ . et  $\underline{\underline{U}}$  est un tenseur symétrique  $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$   $\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}}$ . Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$  est donc égal au carré du tenseur des déformations pures  $\underline{\underline{U}}$  :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2 \quad (30)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange prend aussi une forme particulièrement simple en fonction du tenseur des déformations pures :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{I}}) \quad (31)$$

Dans la base principale  $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3\}$ , les matrices des tenseurs  $\underline{\underline{C}}$ ,  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{U}}$  sont diagonales. La matrice du tenseur  $\underline{\underline{V}}$  est diagonale dans la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ .

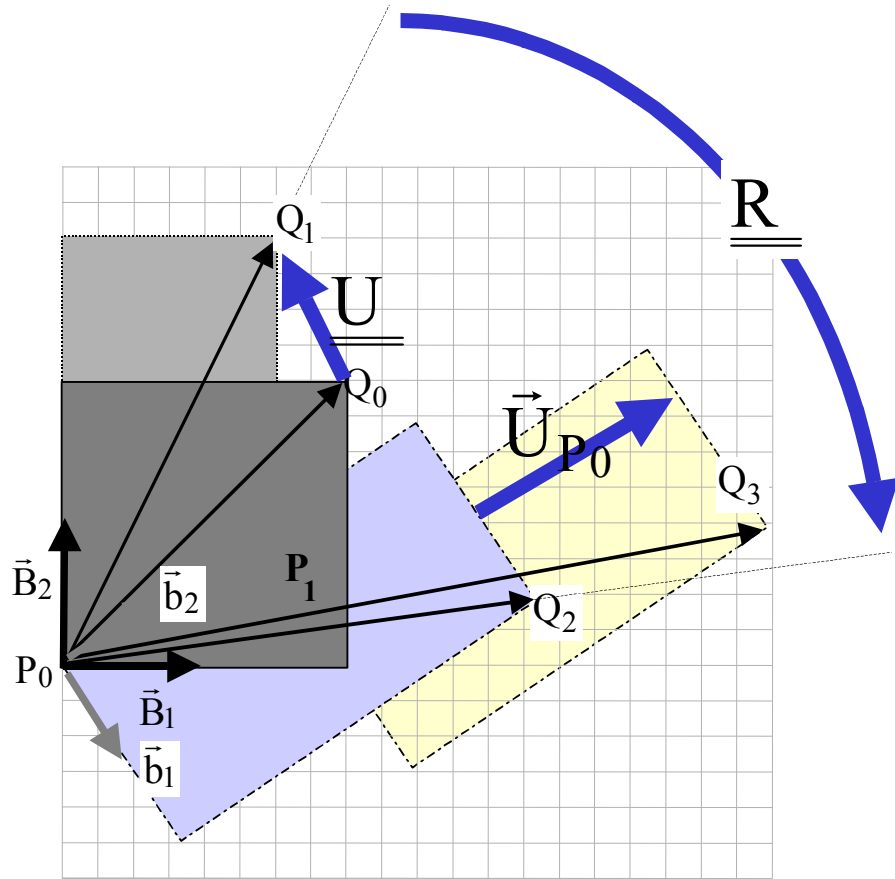


Figure 11: Signification géométrique de la décomposition  $RU$ .

#### V.2.4. Interprétation géométrique du tenseur dilatation et du tenseur rotation

Considérons deux points  $P_0$  et  $Q_0$  de la configuration de référence et l'élément rectiligne reliant ces deux points  $d\bar{X} = \overrightarrow{P_0Q_0}$ . Le transformé de  $d\bar{X}$  par l'application  $\bar{\Phi}$  est un arc de courbe. Nous considérons donc le transporté  $d\bar{x} = \overrightarrow{P_1Q_3} = \underline{\underline{F}}d\bar{X}$  de  $d\bar{X}$ . L'application  $\underline{\underline{U}}$  amène  $Q_0$  en  $Q_1$ .  $P_0$  reste inchangé. L'orientation du vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_1}$  a changée par rapport au vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_0}$ . Mais l'orientation des vecteur de la base  $\bar{B}_1$  et  $\bar{B}_2$  n'a pas changée par l'application  $\underline{\underline{U}}$ . L'application  $\underline{\underline{R}}$  amène  $Q_1$  en  $Q_2$ .  $P_0$  reste inchangé. Lors de la rotation  $\underline{\underline{R}}$ , l'orientation du vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_2}$  change par rapport au vecteur  $\overrightarrow{P_0Q_1}$ , mais sa longueur reste inchangée. La rotation transforme les vecteurs de la base initiale  $\bar{B}_1$  et  $\bar{B}_2$  dans les vecteurs

de la base actuelle  $\vec{b}_2$  et  $\vec{b}_1$ . Et finalement le mouvement de corps rigide  $\bar{U}_{P_0}$  (sans déformation) amène  $P_0$  en  $P_1$  et  $Q_2$  en  $Q_3$ .

### V.2.5. *Mouvement de solide indéformable*

Considérons le cas particulier d'un mouvement de corps solide indéformable. Dans ce cas les longueurs et les angles doivent être conservées. La transformation est composée d'une translation et d'une rotation :

$$\vec{\Phi} = \underline{\underline{R}}(t)\vec{X} + \vec{K}(t)$$

La transformation est homogène. Le gradient de la transformation s'identifie à la matrice de rotation. Ainsi les tenseurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{R}} \rightarrow \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}}^{-1} \\ \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{B}} &= \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{E}} &= \underline{\underline{f}} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{I}}\end{aligned}$$

## VI DEFORMATION EN PETITE TRANSFORMATION

### VI.1. Petites transformations, petites déformations, petits déplacements

Nous avons exprimé le tenseur des dilations de Cauchy-Green  $\underline{\underline{C}}$  et le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  en fonction du tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$  :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}$$

Si les composantes de  $\underline{\underline{H}}$  ( $H_{ij} = \partial U_i / \partial X_j$ ) sont petites devant l'unité (ce sont des nombres adimensionnels), on pourra négliger le terme  $\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}$  dans l'expression de  $\underline{\underline{C}}$  et de  $\underline{\underline{E}}$ . Nous appellerons petite transformation, les transformations pour lesquelles est  $\|\underline{\underline{H}}\|$  est petite.

$$\eta = \|\underline{\underline{H}}\| = \sqrt{\sum_{p,q=1}^3 H_{pq}^2}$$

On travaille dans l'hypothèse des petites déformations si l'on considère comme infiniment petit principal la norme de E. On travaille en petits déplacements si les déplacements sont petits devant la longueur L caractéristique du système. Lorsque les trois hypothèses précédentes sont satisfaites (petits déplacements, petits gradients de déplacements et petites déformations) on dit que l'on adopte l'hypothèse HPP : Hypothèse des petites perturbations. Tous les termes du second ordre seront négligés

### VI.2. Expression des tenseurs C et E sous l'hypothèse HPP

#### VI.2.1. Expression du tenseur des dilations et du tenseurs des déformations

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \Rightarrow \underline{\underline{C}} \cong \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (32)$$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \Rightarrow \underline{\underline{E}} \cong \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (33)$$



### VI.2.2. Dilatation et allongement unitaire dans une direction

La dilatation  $\lambda$  dans la direction  $d\bar{X}$  est définie par  $\lambda = \frac{\|d\bar{x}\|}{\|d\bar{X}\|}$  et l'allongement unitaire  $\delta$  dans la direction  $d\bar{X}$  est défini par  $\lambda = \left( \frac{\|d\bar{x}\| - \|d\bar{X}\|}{\|d\bar{X}\|} \right)$ . Nous avons montré que l et d sont donnés par :

$$\lambda = \frac{\|d\bar{x}\|}{\|d\bar{X}\|} = \sqrt{\bar{t}_0^T \underline{\underline{C}} \bar{t}_0} \text{ avec } \underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}$$

$$\text{donc } \lambda = \sqrt{1 + 2\bar{t}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{t}_0}.$$

Avec  $\delta = \lambda - 1$ . Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous obtenons :

$\lambda = \sqrt{1 + 2\bar{t}_0^T \underline{\underline{E}} \bar{t}_0} = \sqrt{1 + 2\bar{t}_0^T \underline{\underline{\epsilon}} \bar{t}_0}$ .  $\bar{t}_0^T \underline{\underline{\epsilon}} \bar{t}_0$  est supposé petit devant l'unité. Ceci conduit à l'approximation finale pour la dilatation et pour l'allongement unitaire, soit :

$$\lambda = 1 + \bar{t}_0^T \underline{\underline{\epsilon}} \bar{t}_0 \quad (34)$$

$$\delta = \bar{t}_0^T \underline{\underline{\epsilon}} \bar{t}_0 \quad (35)$$

Choisissons  $\bar{t}_0$  un vecteur de base  $\bar{B}_i$  de la base principale de la déformation. Ces vecteurs sont les vecteurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  ou de  $\underline{\underline{E}}$ . Dans l'hypothèse des petites perturbations, la base principale correspond aussi aux vecteurs propres de  $\underline{\underline{\epsilon}}$ .

### VI.3. Conditions de compatibilité

Dans ce paragraphe, nous étudions les conditions à remplir par un champ de déformation pour qu'il puisse être intégré et donner lieu à un champ de déplacement continu. Imaginez un puzzle. Si l'on déforme les pièces du puzzle de façon indépendante, rien ne garantit que l'on puisse les juxtaposer après déformation sans plis ou vides. Le champ de déformation doit donc remplir certaines conditions pour correspondre à un champ de déplacements continu. Ces conditions sont appelées conditions de compatibilité.

#### VI.3.1. Unicité du champ de déplacement

Avant d'étudier les conditions de compatibilité, nous étudions l'unicité du champ de déplacement. Considérons les déformations sous l'hypothèse des petites perturbations.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Les composantes du tenseur gradient des déplacements et les composantes du tenseur petites rotations s'écrivent respectivement :

$$H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Les dérivées des composantes du tenseur rotation s'expriment en fonction des différences de petites déformations. En effet, considérons les dérivées partielles des composantes du tenseur rotation

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\partial^2 U_j}{\partial X_i \partial X_k} \right)$$

En ajoutant et soustrayant le terme  $(\partial^2 U_k / \partial X_i \partial X_j) / 2$ , l'expression précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_k} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial X_i \partial X_j} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U_k}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial X_i \partial X_k} \right)$$

Nous supposons que le champ de déplacement est deux fois continûment dérivable. Ainsi nous pouvons intervertir l'ordre des dérivées partielles et faire apparaître les dérivées des composantes du tenseur déformation :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \right) \right\} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial X_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X_i}$$

Si les déformations ( $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ ) sont nulls, le tenseur des rotations  $\underline{\underline{\omega}}$  est constant et le tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$  est égal au tenseur des rotations  $\underline{\underline{\omega}}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\text{constante}}}, \quad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\omega}}$$

Le champ de déplacements correspondant à une translation  $\bar{U}_0$  et une rotation de corps solide

$$H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \omega_{ij}(t) \Rightarrow U_i = \omega_{ij}(t) X_j + U_0$$

Ainsi, la connaissance du champ des déformations définit le champ de déplacement à une rotation de corps solide et une translation près.

### VI.3.2. Existence d'un champ de déplacement : conditions de compatibilité

Avant d'étudier les conditions de compatibilité, nous étudions l'unicité du champ de

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial X_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X_i} \quad (36)$$

Une condition suffisante pour que ce système différentiel soit intégrable est

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial X_l \partial X_k} \quad (l \neq k)$$

L'équation correspondante sur les composantes du tenseur de déformation est

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial X_l \partial X_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial X_l \partial X_k} \quad (37)$$

Compte tenu de la symétrie, il reste 6 relations indépendantes à satisfaire. Les équations précédentes nous assurent que le système d'équations (36) est intégrable. On peut donc déterminer le tenseur de rotation  $\underline{\underline{\omega}}$  si l'on connaît le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Ainsi, le tenseur gradient des déplacements  $\underline{\underline{H}}$  est défini. La question est maintenant si l'on peut remonter aux déplacements à partir de la connaissance du tenseur. Autrement dit le système

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

est il intégrable ? La réponse sera positive si  $\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_1} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_1 \partial X_j} (i \neq j)$  soit

$$\frac{\partial}{\partial X_1} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_j} (\varepsilon_{i1} + \omega_{i1}) (i \neq j).$$

Or cette égalité est bien satisfaite d'après les relations (36). Le passage de  $\underline{\underline{H}}$  à  $\underline{H}$  n'introduit donc pas de condition de compatibilité supplémentaires. Les 6 relations indépendantes parmi les équations (37) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} \right\} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} \right\} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_3} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} \right\} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_3 \partial X_1} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} \end{aligned} \quad (38)$$

Les relations de compatibilité peuvent se mettre sous une forme plus condensée, si l'on adopte la notation symbolique de Gibbs. En notation indicielle d'Einstein, les relations de compatibilité s'écrivent :

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}}_{\Delta \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{grād}\{\text{grād}[trace(\underline{\underline{\varepsilon}})]\}} \overbrace{\varepsilon_{kk}}^{trace(\underline{\underline{\varepsilon}})} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} \right)}_{\text{grād}[div(\underline{\underline{\varepsilon}})]} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

Ce qui conduit à l'expression suivante en notation de Gibbs :

$$\Delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \text{grād}\{\text{grād}[trace(\underline{\underline{\varepsilon}})]\} = \text{grād}[div(\underline{\underline{\varepsilon}})] + \{\text{grād}[div(\underline{\underline{\varepsilon}})]\}^T \quad (39)$$

## VII VITESSES DE DEFORMATION

### VII.1. Tenseur gradient des vitesses $\underline{\underline{L}}$

Pour beaucoup de matériaux, la réponse à une sollicitation dépend du chemin. Faire une traction (un allongement) suivi d'une compression (un raccourcissement) ne revient pas au même que de faire une compression suivie d'un allongement. Pour modéliser de tels comportements, nous définissons la vitesse de déformation. La vitesse en description eulérienne d'une particule est définie par

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad (40)$$

La dérivée partielle par rapport au temps correspond au changement de position d'une particule à une position fixée dans le matériau. Ici, nous adoptons la description lagrangienne consistant à suivre une particule dans son mouvement. La différence de vitesse entre deux particules proches dans la configuration actuelle est donnée par

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = \underline{\underline{L}} d\vec{x} \quad \underline{\underline{L}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad (41)$$

$\underline{\underline{L}}$  est le tenseur gradient des vitesses dans la configuration actuelle.

### VII.2. Variation temporelle du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}$

Dans la section II.1., nous avons introduit le tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ , tel que  $d\vec{x} = \underline{\underline{F}} d\vec{X}$ . Le tenseur  $\underline{\underline{L}}$  d'exprimer l'incrément de vitesse entre deux points voisins dans la configuration actuelle. L'introduction du tenseur  $\underline{\underline{F}}$  permettra d'exprimer l'incrément de vitesse entre deux points voisins dans la configuration de référence :

$$d\vec{v} = \underline{\underline{L}} d\vec{x} = \underline{\underline{L}} \underbrace{\underline{\underline{F}} d\vec{X}}_{d\vec{x}}$$

Or l'incrément vitesse  $d\bar{v}$  peut être obtenue directement à partir de la dérivée de l'incrément du vecteur position  $d\bar{x}$  :

$$d\bar{v} = \frac{\partial(d\bar{x})}{\partial t} = \frac{\partial(\underline{\underline{F}}d\bar{X})}{\partial t} = \frac{\partial(\underline{\underline{F}})}{\partial t}d\bar{X} + \underline{\underline{F}} \underbrace{\frac{\partial(d\bar{X})}{\partial t}}_0 = \dot{\underline{\underline{F}}}d\bar{X}$$

$d\bar{v}$  est définie comme la différence de vitesse entre deux particules distantes de  $d\bar{X}$  dans la configuration de base. Si les deux particules ont été choisies,  $d\bar{X}$  ne change évidemment pas pendant toute l'histoire de la déformation. Comparant les deux expressions précédentes de l'incrément de vitesse  $d\bar{v}$  entre deux particules distantes de  $d\bar{X}$  dans la configuration initiale, nous obtenons :

$d\bar{v}$

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{F}} \quad (42)$$

### VII.3. Tenseur vitesse de déformation et vitesse de rotation

Le tenseur  $\underline{\underline{L}}$  représente un taux de déformation et un taux de rotation. Les tenseurs taux de déformation et taux de rotation s'obtiennent comme en théorie des petites déformations par les parties symétrique et antisymétrique de respectivement  $\underline{\underline{L}}$ , soit pour le tenseur taux de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right)^T \right) \quad (43a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (43b)$$

et pour le tenseur taux de rotation

$$\dot{\underline{\underline{\omega}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) - \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right)^T \right) \quad (44a)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} - l_{ji}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (44b)$$

