

# Table des matières

<b>3 Critères</b>	<b>21</b>
3.1 Les outils disponibles . . . . .	21
3.2 Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique . . . . .	23
3.2.1 Critère de von Mises . . . . .	23
3.2.2 Critère de Tresca . . . . .	23
3.2.3 Comparaison des critères de Tresca et von Mises . . . . .	23
3.3 Critères faisant intervenir la pression hydrostatique . . . . .	24
3.3.1 Critère de Drucker–Prager . . . . .	24
3.3.2 Le critère de Mohr–Coulomb . . . . .	25
3.3.3 Critère de Rankine . . . . .	26
3.3.4 Critères «fermés» . . . . .	26
3.4 Critères anisotropes . . . . .	27

## Chapitre 3

# Critères

La description des modèles à utiliser sous chargement uniaxial qui a été faite dans le chapitre précédent a mis en évidence un domaine d'élasticité, dans l'espace des contraintes et des variables d'érouissage, pour lequel il n'y a pas d'écoulement plastique ou viscoplastique. La trace de ce domaine sur l'axe de la contrainte se limite à un segment de droite, qui peut subir une translation ou une extension (il peut même parfois se limiter à un point). Par ailleurs certains modèles sont capables de représenter une contrainte maximale supportable par le matériau. Afin de pouvoir aborder l'étude des chargements multiaxiaux, il est nécessaire de se donner les moyens de définir de telles limites en tridimensionnel. On passe donc en revue les outils disponibles pour écrire ces modèles dans le cas de milieux continus, enfin on montre les principales classes de critères. De même que pour les lois d'écoulement qui ont été citées précédemment, le choix de tel ou tel critère va dépendre du matériau étudié.

### 3.1 Les outils disponibles

Le cas du chargement uniaxial étudié jusqu'à présent fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. Ainsi dans le cas du modèle de Prager, le domaine d'élasticité initial est le segment  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ , et sa position pour une déformation plastique  $\varepsilon^p$  est  $[-\sigma_y + X, \sigma_y + X]$ , avec  $X = H\varepsilon^p$ . Il est décrit par la fonction de charge (définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ),  $f : (\sigma, X) \rightarrow f(\sigma, X)$ . Pour définir ce même domaine en présence de chargements multiaxiaux, la fonction  $f$  devient une fonction du tenseur de contrainte,  $\underline{\sigma}$  et du tenseur  $\underline{\mathbf{X}} = H\underline{\varepsilon}^p$ , (de  $\mathbb{R}^{12}$  dans  $\mathbb{R}$ ) telle que si  $f(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{X}}) < 0$ , l'état de contraintes est élastique, si  $f(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{X}}) = 0$ , le point de fonctionnement est sur la frontière, la condition  $f(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{X}}) > 0$  définissant l'extérieur du domaine. Dans le cas général, l'ensemble de départ contiendra les contraintes et toutes les variables d'érouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir  $f(\underline{\sigma}, A_i)$ . On va dans un premier temps limiter la présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables  $A_i$  sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions  $f$  dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est convexe (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en  $\underline{\sigma}$ , ce qui implique, pour tout réel  $\lambda$  compris entre 0 et 1, et pour un couple  $(\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2)$  quelconque de la frontière :

$$f(\lambda \underline{\sigma}_1 + (1 - \lambda) \underline{\sigma}_2) \leq \lambda f(\underline{\sigma}_1) + (1 - \lambda) f(\underline{\sigma}_2) \quad (3.1)$$

Comme dans le cas de l'étude du tenseur d'élasticité, il faut ici encore respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope que  $f$  soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du

tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique :

$$I_1 = \text{trace}(\underline{\sigma}) = \sigma_{ii} \quad (3.2)$$

$$I_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{\sigma}^2) = (1/2) \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad (3.3)$$

$$I_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{\sigma}^3) = (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (3.4)$$

$$\text{trace}(\underline{\sigma}^3) = (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (3.5)$$

L'expérience montre que la déformation plastique d'un grand nombre de matériaux est indépendante de la pression hydrostatique. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur  $\underline{s}$ , défini en enlevant à  $\underline{\sigma}$  la pression hydrostatique, et ses invariants :

$$\underline{s} = \underline{\sigma} - (I_1/3) \mathbf{I} \quad (3.6)$$

$$J_1 = \text{trace}(\underline{s}) = 0 \quad (3.7)$$

$$J_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{s}^2) = (1/2) s_{ij} s_{ji} \quad (3.8)$$

$$J_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{s}^3) = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de  $f$  sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de  $J_2$  l'invariant  $J$ , qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ou de la contrainte  $\sigma$  dans le cas d'un état de traction simple :

$$J = ((3/2) s_{ij} s_{ji})^{1/2} = ((1/2) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2))^{1/2} = |\sigma| \quad (3.11)$$

La valeur précédente est à rapprocher de celle de la contrainte de cisaillement octaédral. Les plans octaédraux sont ceux dont le vecteur normal est de type  $\{1, 1, 1\}$  dans l'espace des contraintes principales. Il est aisé de montrer que le vecteur contrainte évalué sur le plan  $(1,1,1)$  à partir des valeurs de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  a pour composantes normale  $\sigma_{oct}$  et tangentielle  $\tau_{oct}$  :

$$\sigma_{oct} = (1/3) I_1 \quad \tau_{oct} = (\sqrt{2}/3) J \quad (3.12)$$

La valeur de  $J$  définit donc le cisaillement dans les plans octaédraux. Les remarques précédentes indiquent que le plan de normale  $(1,1,1)$  va être un plan privilégié pour la représentation des critères. En effet, tous les points représentant des états de contrainte qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique (donc qui sont équivalents vis-à-vis d'un critère qui ne fait pas intervenir la pression hydrostatique) s'y projettent sur le même point. La figure 3.1 montre ce plan, dans lequel les projections des axes principaux déterminent des angles de  $2\pi/3$ , et qui a comme équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -I_1/3$ .

Pour traiter le comportement des sols (les argiles par exemple) ou des matériaux pulvérulents artificiels, on est amené à utiliser le troisième invariant. On introduit alors :

$$S = ((9/2) s_{ij} s_{jk} s_{ki})^{1/3} = ((9/2) (\underline{s} \cdot \underline{s}) : \underline{s})^{1/3} \quad (3.13)$$

On note que  $S$  vaut  $\sigma$  en traction comme en compression simple (tenseur uniaxial avec comme seule composante non nulle  $\sigma$ ), qu'il vaut 0 en cisaillement simple, et  $-\sigma$  pour une expansion équi-biaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , les autres composantes nulles). Cela permet donc de représenter des différences de comportement en traction et en compression. Par ailleurs, sa combinaison avec  $J$  permet de définir l'angle de Lode,  $\theta$ , qui intervient dans la définition de certains critères :

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{S}{J} \right)^3 \quad (3.14)$$

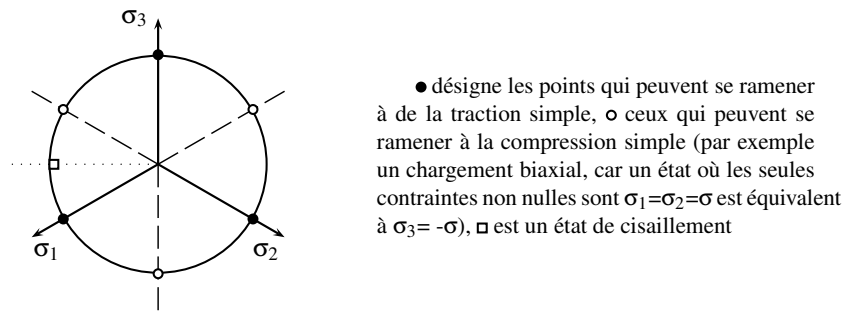


FIG. 3.1 – Etats de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur

## 3.2 Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

### 3.2.1 Critère de von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore  $J$  [4] (voir en annexe la section ??). Ceci correspond à un ellipsoïde dans l'espace des tenseurs  $\underline{s}$  symétriques (expression quadratique des composantes  $s_{ij}$ , qui sont toutes équivalentes), soit, si  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité en traction :

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y \quad (3.15)$$

### 3.2.2 Critère de Tresca

L'expression du critère de von Mises fait intervenir les cisaillements maximaux dans chaque plan principal, représentés par les quantités  $(\sigma_i - \sigma_j)$ . La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y \quad (3.16)$$

On peut également exprimer le critère en fonction de l'angle de Lode :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{2J}{\sqrt{3}} \cos(\theta) - \sigma_y \quad (3.17)$$

### 3.2.3 Comparaison des critères de Tresca et von Mises

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent :

- dans le plan traction-cisaillement (figure 3.2a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \quad (3.18)$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \quad (3.19)$$

- dans le plan des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (figure 3.2b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y \quad (3.20)$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (3.21)$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (3.22)$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1 \quad (3.23)$$

$$\text{(symétrie par rapport à l'axe } \sigma_1 = \sigma_2) \quad (3.24)$$

- dans le plan déviateur (figure 3.1), le critère de von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone ;
- dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice  $(1,1,1)$ , qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur.

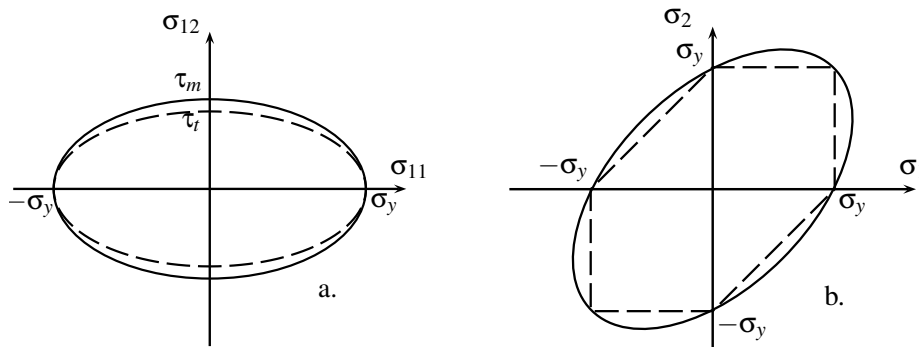


FIG. 3.2 – Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de von Mises (traits pleins), (a) En traction-cisaillement (von Mises :  $\tau_m = \sigma_y/\sqrt{3}$ , Tresca :  $\tau_t = \sigma_y/2$ ), (b) En traction biaxiale

### 3.3 Critères faisant intervenir la pression hydrostatique

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression.

#### 3.3.1 Critère de Drucker-Prager

C'est une extension du critère de von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'«altitude» sur la trissectrice des axes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de contraintes principales (figure 3.3a) :

$$f(\sigma) = (1 - \alpha)J + \alpha I - \sigma_y \quad (3.25)$$

La limite d'élasticité en traction reste  $\sigma_y$ , et la limite d'élasticité en compression est  $-\sigma_y/(1 - 2\alpha)$ . Le coefficient  $\alpha$  dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de von Mises pour  $\alpha = 0$  (figure 3.3b).

Une expression plus complexe de ce même critère fait intervenir une forme plus compliquée de la contribution déviatorique, prenant en compte le troisième invariant. En reprenant l'expression 3.13 qui

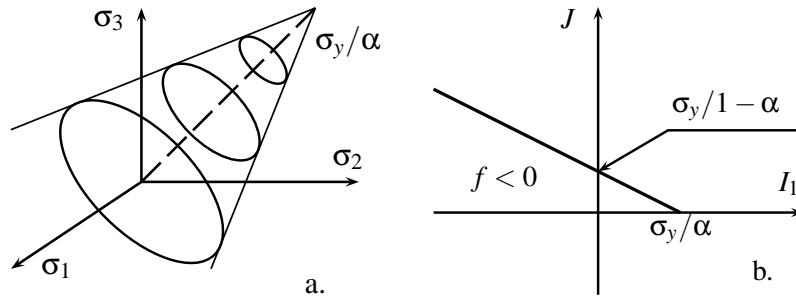


FIG. 3.3 – Représentation du critère de Drucker–Prager, (a) dans l’espace des contraintes principales, (b) dans le plan  $I_1 - J$

défini  $S$ , on pose :

$$t = \frac{J}{2} \left[ 1 + \frac{1}{K} - \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \left( \frac{S}{J} \right)^3 \right] \quad (3.26)$$

On utilise ensuite  $t$  à la place de  $J$  dans la formule 3.25.  $K$  est un coefficient dépendant du matériau ; on retrouve le critère initial avec  $K = 1$ , et on doit avoir  $0,778 \leq K \leq 1$  pour que le critère reste convexe.

### 3.3.2 Le critère de Mohr–Coulomb

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximal, mais en même temps la contrainte «moyenne», représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (\text{avec } \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1) \quad (3.27)$$

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau ( $T_t$  en figure 3.4a) est d’autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée [1]. La limite admissible constitue une *courbe intrinsèque* dans le plan de Mohr. La formule énoncée ci-dessus est obtenue avec une règle de frottement linéaire :

$$|T_t| < -\tan(\phi) T_n + C \quad (3.28)$$

La constante  $C$  est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau sous contrainte moyenne nulle. L’angle  $\phi$  désigne le frottement interne du matériau. Si  $C$  est nul et  $\phi$  non nul, le matériau est dit pulvérulent. Si  $\phi$  est nul et  $C$  non nul, comme dans le cas du critère de Tresca, le matériau est purement cohérent.

Le critère peut également s’exprimer sous la forme suivante, en fonction de la poussée  $K_p$  et de la limite d’élasticité en compression,  $R_p$  :

$$f(\sigma) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p \quad (3.29)$$

$$\text{avec } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.30)$$

Dans le plan déviateur (figure 3.4b) on obtient un hexagone irrégulier, caractérisé par les valeurs suivantes (avec  $p = (-1/3)I_1$ ) :

$$\sigma_t = 2\sqrt{6}(C \cos \phi - p \sin \phi)/(3 + \sin \phi) \quad (3.31)$$

$$\sigma_c = 2\sqrt{6}(-C \cos \phi + p \sin \phi)/(3 - \sin \phi) \quad (3.32)$$

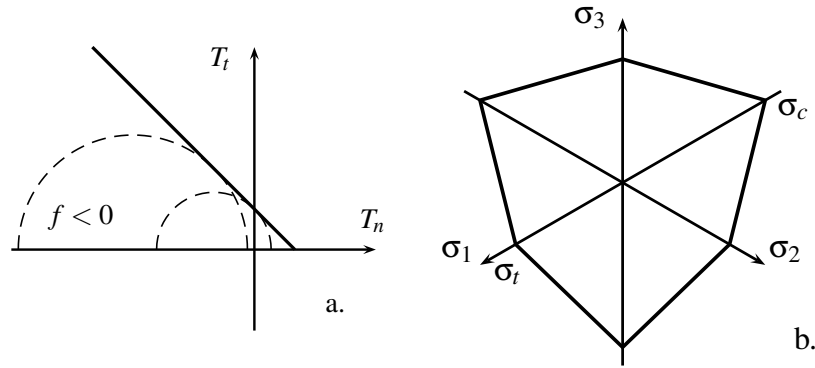


FIG. 3.4 – Représentation du critère de Mohr-Coulomb, (a) dans le plan de Mohr, (b) dans le plan déviateur

### 3.3.3 Critère de Rankine

Ce critère est plutôt employé comme critère de rupture dans les matériaux fragiles (craie), et pas pour définir la limite d'un domaine d'élasticité. Il s'exprime [3] en fonction des contraintes normales principales :

$$f(\sigma) = \text{Max}_i(\sigma_i) - \sigma_y \quad (3.33)$$

On peut illustrer ce critère par sa trace dans le plan de contraintes principales  $\sigma_1$ – $\sigma_2$ , lorsque  $\sigma_3 = 0$  : il s'agit de deux demi-droites parallèles aux axes, dans la direction des contraintes négatives, et qui s'appuient sur le point  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ .

### 3.3.4 Critères «fermés»

Les deux critères précédents prévoient que le matériau devient infiniment résistant en compression triaxiale. Ce comportement n'est en général pas vérifié sur les matériaux réels qui sont sensibles à la pression hydrostatique. Pour permettre de simuler par exemple des opérations de compaction, il faut «fermer» les surfaces de charge. Les modèles ci-dessous s'appliquent aux sols (argiles notamment), aux poudres artificielles :

- le critère elliptique, dans lequel les deux paramètres matériau  $C$  et  $F$  vont dépendre de la porosité

$$f(\sigma) = 3CJ^2 + FI_1^2 - \sigma_0 \quad (3.34)$$

- le modèle «Cam-clay modifié» ; il s'agit d'un modèle dérivé d'un modèle développé, pour l'argile à l'Université de Cambridge ; il est défini par une ellipse décalée vers la compression hydrostatique ; il n'est utilisable qu'en compression :

$$f(\sigma) = \left(\frac{J}{M}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{3} - p_c\right)^2 - p_c^2 - \sigma_y^2 \quad (3.35)$$

Une autre manière d'obtenir un domaine fermé est de conserver la forme initiale du critère qui prévoit un matériau indéformable en pression hydrostatique de compression, et de lui associer un «bouchon» du côté des pressions hydrostatiques négatives. C'est le *cap-model*, qui ferme par une ellipse dans le plan  $J$ – $I$  (ou  $t$ – $I$ ) le domaine défini par le critère de Drucker–Prager.

Un dernier type d'applications mérite d'être cité dans cette énumération. Il s'agit de la représentation de l'endommagement des alliages métalliques. Pour le représenter, on travaille également avec une influence de la pression hydrostatique. Les modèles sont sensibles à la pression hydrostatique, à cause de l'ouverture progressive de cavités. Le modèle le plus connu est dû à Gurson [2].

$$f(\sigma) = \psi_* = \frac{J^2}{\sigma_y^2} + 2\eta_*q_1 \cosh\left(\frac{q_2I_1}{2\sigma_y}\right) - (1 + q_1^2\eta_*^2) \quad (3.36)$$

Comme précédemment, on ne considère ici que la surface initiale. Pour tous les modèles, il y a une évolution de la limite d'élasticité avec le chargement ; la valeur de  $\sigma_y$  ne restera donc pas constante pendant le chargement.

### 3.4 Critères anisotropes

Lorsqu'on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu'en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation, et une distorsion. Les deux premières modifications sont représentées par les écrouissages isotropes et cinématiques, mais la dernière n'est pas prise en compte par les modèles courants, d'autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe : on est là en présence d'anisotropie induite. Il existe par ailleurs des matériaux fondamentalement anisotropes par fabrication, matériaux composites à fibres longues par exemple. Les modèles de matériaux hétérogènes permettent de tenir compte naturellement de certaines anisotropies, mais ils restent d'un emploi délicat, et on ne peut pas actuellement envisager de traiter dans un cadre industriel le cas de l'anisotropie la plus complexe. Il existe néanmoins de nombreuses possibilités d'extension des critères isotropes à la description de matériaux anisotropes. La voie la plus générale, mais qui n'est pas réellement opérationnelle, consiste à considérer que le critère est une fonction des composantes du tenseur des contraintes dans une base donnée. La forme choisie doit être intrinsèque, ce qui impose que le résultat obtenu soit invariant par changement de repère. Un guide pour construire ce type de modèle est fourni par les théories des invariants.

La solution la plus généralement adoptée généralise le critère de von Mises, en utilisant à la place de  $J(\sigma)$  l'expression :

$$J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{\sigma} : \underline{\mathbf{B}} : \underline{\sigma})^{1/2} \quad (3.37)$$

qui fait intervenir le tenseur du quatrième ordre  $\underline{\mathbf{B}}$ . Choisir pour  $\underline{\mathbf{B}}$  le tenseur  $\underline{\mathbf{J}}$  tel que  $\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{J}} : \underline{\sigma}$  ( $\underline{\mathbf{s}}$  déviateur associé à  $\underline{\sigma}$ ) redonne bien entendu le critère de von Mises. Comme pour le cas de l'élasticité, on peut réduire le nombre de composantes libres du tenseur  $\underline{\mathbf{B}}$  par des considérations de symétrie. En plus des conditions habituelles sur les composantes  $B_{ijkl} = B_{ijlk} = B_{jikl} = B_{klij}$ , il faut tenir compte du fait que  $B_{jjkl} = 0$  si l'on veut encore assurer l'incompressibilité plastique (la vitesse de déformation plastique est portée par la direction  $\underline{\mathbf{B}} : \underline{\sigma}$ ). Il reste donc 15 coefficients libres (comme une matrice  $5 \times 5$  symétrique). Si le matériau admet 3 plans de symétrie perpendiculaires, les termes de couplage entre composantes axiales et composantes de cisaillement (tels  $B_{1112}$ ) sont nuls, et il ne reste que 6 composantes, lorsque le tenseur est exprimé dans le repère correspondant. On retrouve alors l'expression classique :

$$f(\underline{\sigma}) = (F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2)^{1/2} - \sigma_y = f_H(\underline{\sigma}) \quad (3.38)$$

En représentant le tenseur d'ordre 4 comme une matrice  $6 \times 6$ , les termes de  $\underline{\mathbf{B}}$  s'écrivent dans ce cas particulier :

$$\begin{pmatrix} F+H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G+F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & H+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Une manipulation simple permet de vérifier que le même critère s'exprime également en fonction des composantes du tenseur déviateur associé à  $\underline{\sigma}$ ,  $J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{\mathbf{s}} : \underline{\mathbf{B}}' : \underline{\mathbf{s}})^{1/2}$ , où les composantes de  $\underline{\mathbf{B}}'$



s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 2F - G + 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2F + 2G - H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F + 2G + 2H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

L'isotropie transverse autour de l'axe 3 ne laisse subsister que 3 coefficients indépendants, car on a alors  $F = G$ ,  $L = M$ ,  $N = F + 2H$ . L'isotropie complète implique de plus  $F = H$ ,  $L = N$ ,  $N = 3F$ , ce qui redonne le tenseur  $\tilde{\mathbf{J}}$  signalé plus haut et l'invariant de von Mises. Si on veut de plus représenter la dissymétrie entre traction et compression, il faut avoir recours à une expression qui réintroduit une forme linéaire, telle celle du critère de Tsai :

$$f(\underline{\sigma}) = f_H(\underline{\sigma}) + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + P(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \quad (3.41)$$

De même qu'il existe une voie de généralisation pour les critères exprimés en terme d'invariants, il existe des résultats pour ceux qui sont exprimés en termes de contraintes principales. Un cas très courant en géotechnique est celui des matériaux isotropes transverses, dont le critère peut s'écrire en fonction des contraintes normales principales et de  $N$  et  $T$ , qui sont respectivement les contraintes normales et tangentielles sur une facette perpendiculaire à l'axe de schistosité (c'est-à-dire une facette parallèle au plan isotrope de schistosité), défini par le vecteur normé  $\underline{\mathbf{n}}$ .

$$N = \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad T = \left( \left\| \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right\|^2 - N^2 \right)^{1/2} \quad (3.42)$$

Ainsi le critère de Coulomb pour les matériaux isotropes transverses s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = \max(K_p \max \sigma_i - \min \sigma_i - R_c, T + N \tan \phi' - C') \quad (3.43)$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_c = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.44)$$

et où  $\phi$  désigne l'angle de frottement dans le plan de schistosité,  $C$  la cohésion,  $\phi'$  l'angle de frottement pour le glissement d'une lame par rapport à l'autre,  $C'$  la cohésion.

## Résumé

- Critère de Tresca :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y$$

- Critère de von Mises :

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y$$

- dans le plan traction–cisaillement (figure 3.2a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

- dans le plan des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (figure 3.2b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$$

(symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2$ )

- Critère de Drucker–Prager :

$$f(\underline{\sigma}) = (1 - \alpha)J + \alpha I - \sigma_y$$

- Critère de Coulomb :

$$f(\underline{\sigma}) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p$$

$$\text{avec } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$



# Bibliographie

- [1] Coulomb C.A. Essai sur une application des règles de maxims et minims à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoires de l'Académie Royale*, pages 343–382, 1776.
- [2] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I— Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 44 :2–15, 1977.
- [3] G.I. Taylor and M.A. Quinney. On the stability of loose earth. *Phil. Trans. Royal Society, A*, 147 :9–27, 1857.
- [4] R. von Mises. Mechanik des plastischen Formänderung von Kristallen. 8 :161–185, 1928.