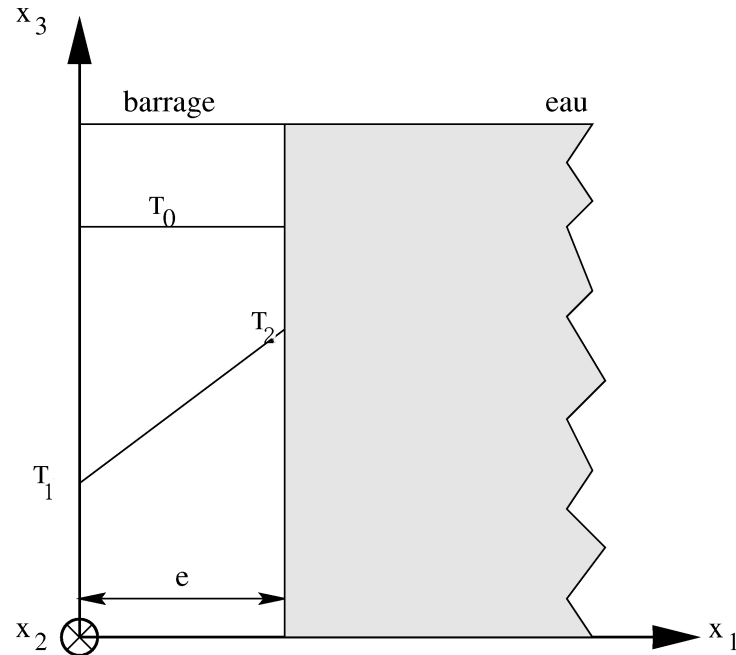


ÉTUDE DE CONTRAINTES THERMIQUES DANS UN BARRAGE



Géométrie et gradient thermique

On veut caractériser les contraintes d'origine thermique dans un barrage en béton. On ne considère pas pour le moment les contraintes dues à la pression de l'eau retenue, qui peuvent être prises en compte par superposition. On vérifiera en fin de compte que les valeurs correspondantes sont faibles devant les contraintes thermomécaniques. On ne considère pas non plus le poids propre du barrage.

On étudie le prisme de la figure ci-dessus, d'épaisseur e selon x_1 , "infini" selon x_2 , "long" selon x_3 , (hauteur h). La température lors de la fabrication est uniforme $T = T_0$, et elle évolue ensuite, pour prendre une valeur T_1 en $x_1 = 0$ et T_2 en $x_1 = e$, avec un profil que l'on supposera linéaire.

On suppose également que ce rectangle représente la section minimale (en direction x_2) d'un barrage voûte, et qu'elle est bloquée par les renforts placés régulièrement le long du barrage. La base du barrage ne peut pas glisser horizontalement, mais on négligera l'effet de «pincement» introduit par ce blocage. On suppose qu'une section horizontale reste horizontale, et une section verticale reste verticale, si bien que la déformée du rectangle initial est un rectangle.

Application numérique :

- module d'Young : $E = 40\,000$ MPa ; coefficient de Poisson : $\nu = 0.2$
- coefficient de dilatation thermique : $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- température au moment de la construction : $T_0 = 20^\circ\text{C}$
- température côté air : en hiver, $T_1 = -40^\circ\text{C}$; en été, $T_1' = 20^\circ\text{C}$
- température côté eau : $T_2 = 0^\circ\text{C}$

1. *Prévoir, sans calcul, la forme des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que les directions principales.*

Chacune des composantes des tenseurs de contrainte et de déformation dépend *a priori* de x_1 , x_2 et x_3 . Le fait que l'on se place en déformation plane en direction x_2 supprime la dépendance en x_2 . On négligera aussi la dépendance en x_3 , en considérant qu'une section horizontale courante du barrage subit le même gradient thermique quelle que soit la valeur de x_3 . Ces hypothèses permettent d'annuler les composantes 12 et 23, car on a un état de déformation plane en direction 2, et les termes 13 nuls car il y a indépendance en x_3 , et une section plane de normale x_3 reste plane. Dans le repère x_1, x_2, x_3 , les tenseurs de contrainte et de déformation sont donc

respectivement représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. *Ecrire les relations de Hooke donnant σ_{ij} en fonction de ε_{kl} , en prenant en compte une dilatation thermique en chaque point du solide, $\varepsilon_{th} = \alpha(T - T_0)$, en utilisant E et ν .*

Les relations de Hooke s'écrivent :

$$E\varepsilon_{11} = E\alpha(T - T_0) + \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} \quad (2)$$

$$E\varepsilon_{22} = E\alpha(T - T_0) - \nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33} = 0 \quad (3)$$

$$E\varepsilon_{33} = E\alpha(T - T_0) - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} + \sigma_{33} = E\varepsilon_{33}^0 \quad (4)$$

On a respectivement exprimé les états de déformation plane (éq.3) et déformation plane généralisée (éq.4).

3. *A l'aide des équations d'équilibre et des conditions aux limites en $x_1 = 0$ et $x_1 = e$, trouver σ_{11} .*

Les contraintes et les déformations ne dépendent que de x_1 , la seule équation d'équilibre non triviale s'exprime $\sigma_{11,1} = 0$; σ_{11} est donc indépendante de x_1 . Comme par ailleurs elle doit être nulle à la fois en $x_1 = 0$ et $x_1 = e$, elle est nulle partout :

$$\forall M, \sigma_{11} = 0 \quad (5)$$

Les expressions de la question précédente se réexpriment donc :

$$E\varepsilon_{11} = E\alpha(T - T_0) - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} \quad (6)$$

$$0 = E\alpha(T - T_0) + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33} \quad (7)$$

$$E\varepsilon_{33}^0 = E\alpha(T - T_0) - \nu\sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (8)$$

4. *En écrivant la résultante des efforts sur une section courante du barrage de normale x_3 , trouver σ_{33} . Calculer la valeur maximale de σ_{33} .*

On exprime σ_{22} en fonction de σ_{33} dans l'équation 7, et on reporte dans l'équation 8, ce qui fournit :

$$E\varepsilon_{33}^0 = E\alpha(1 + \nu)(T - T_0) + (1 - \nu^2)\sigma_{33} \quad (9)$$

En exprimant le fait que la résultante des efforts sur une surface normale à l'axe x_3 est nulle, il vient :

$$0 = Ee\varepsilon_{33}^0 - E\alpha(1 + \nu) \int_0^e (T - T_0) dx \quad (10)$$

d'où

$$\varepsilon_{33}^0 = \frac{\alpha(1 + \nu)}{e} \int_0^e (T - T_0) dx \quad (11)$$

On en déduit σ_{33} , qui s'avère indépendant de T_0 :

$$\sigma_{33} = \frac{E\alpha}{e(1 - \nu)} \int_0^e (T - T_0) dx - \frac{E\alpha}{1 - \nu} (T - T_0) = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \left(\int_0^e \frac{T}{e} dx - T \right) \quad (12)$$

Dans le cas d'un profil linéaire :

$$\sigma_{33} = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T \right) \quad (13)$$

Dans ce dernier cas, la contrainte est maximale en surface ; elle est positive du côté froid, et vaut :

$$\sigma_{33\max} = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \frac{T_2 - T_1}{2} \quad (14)$$

Il faut aussi remarquer que le résultat ne dépend pas directement de l'épaisseur du mur. Dans la pratique, pour des conditions d'échanges thermiques données, une épaisseur plus importante conduira à des gradients plus importants. On en déduit que les parois qui résistent le mieux aux contraintes thermomécaniques sont les parois les plus minces.

5. Calculer σ_{22} .

En remplaçant σ_{33} par son expression dans l'équation 7, il vient :

$$\sigma_{22} = -\frac{E\alpha(T - T_0)}{1 - \nu} + \frac{E\alpha\nu}{1 - \nu} \int_0^e \frac{T - T_0}{e} dx \quad (15)$$

Dans le cas d'un profil linéaire,

$$\sigma_{22} = -\frac{E\alpha(T - T_0)}{1 - \nu} + \frac{E\alpha\nu}{1 - \nu} \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) \quad (16)$$

On note que :

$$\begin{aligned} \text{si } T_1 = T_2 & \quad \sigma_{22} = E\alpha(T_0 - T_1) \\ & \quad \text{(tension en direction } x_2 \text{ si } T_1 < T_0) \\ \text{si } T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} & \quad \sigma_{22} = -\frac{E\alpha(T - T_0)}{1 - \nu} \end{aligned}$$

Application numérique :

En hiver, l'air (T_1) est plus froid (température T_1) que l'eau (T_2). Il s'exerce une traction biaxiale, dont la valeur maximale est du côté de l'air.

$$\sigma_{33max} = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \frac{T_2 - T_1}{2}$$

$$\sigma_{22max} = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \left((T_0 - T_1) + \nu \left(\frac{T_2 + T_1}{2} - T_0 \right) \right)$$

Soit avec les valeurs numériques proposées :

$$\sigma_{33max} = \frac{40000 \times 14.10^{-6} \times 40}{(1. - 0.2) \times 2} = 14\text{MPa}$$

$$\sigma_{22max} = \frac{40000 \times 14.10^{-6}}{0.8} ((20 + 40) + 0.2 \times (-20 - 20)) = 36,4\text{MPa}$$

Les valeurs obtenues sont suffisantes pour produire des fissures (le béton résiste à moins de 10 MPa en traction).

Entre l'hiver et l'été, la variation de déformation verticale ne dépend que de la variation de température de l'air :

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{33}^0 &= \frac{(1 + \nu)}{e} \alpha \int_0^e (T' - T) dx \\ &= (1 + \nu) \alpha \frac{T_1' - T_1}{2} \\ &= 1.2 \times 14.10^{-6} \times 60/2 = 5.04 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Sur la hauteur de 200 m, le déplacement vaut donc environ 10 cm ! Il faut impérativement tenir compte des dilatations dans la conception de ce type d'ouvrage.