

- ▶ Etude des fissures macroscopiques, *id est* dont la géométrie doit être explicitement prise en compte dans la structure.  
Typiquement, 1mm.
- ▶ Observations  
Si la longueur de fissure augmente, la résistance de la pièce diminue  
Propagation/arrêt de fissure  
Rupture ductile vs rupture fragile, température de transition, résilience
- ▶ Plan : **Mécanique linéaire de la rupture**
  - ▶ Taux de restitution d'énergie
  - ▶ Etude des champs de contrainte et déformation
  - ▶ Facteur d'intensité de contrainte
  - ▶ Fissures en tridimensionnel
  - ▶ Propagation en fatigue

## Quelques dates

---

- ▶ 1920, Griffith rupture d'un milieu élastique-fragile, bilan énergétique
- ▶ 1956, Irwin, singularité du champ de contraintes en pointe de fissure
- ▶ 1968, intégrale de Rice-Cherepanov
- ▶ années 70, développement des méthodes numériques, éléments finis
- ▶ années 70, fissuration en fatigue, chargements complexes
- ▶ années 80, aspects 3D
- ▶ *approche locale* de la fissuration

## Taux de restitution d'énergie

---

«La puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface  $\mathcal{A}$  est égale à la variation de l'énergie potentielle totale  $\mathcal{V}$ , appelée *taux de restitution d'énergie*» (unité : joule/m<sup>2</sup>) :

$$G = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{A}}$$

–propagation si :  $G - 2\gamma^s \geq 0$

–arrêt si :  $0 \geq G - 2\gamma^s$

avec  $\gamma^s$  énergie spécifique de rupture par unité de surface

## Evaluation du taux de restitution d'énergie

---

Forces de volume négligées, quasi-statique, solide de volume  $V$ , force  $\underline{F}^d$  imposée sur  $S_F$ ) :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS$$

Et (théorème de la divergence) :

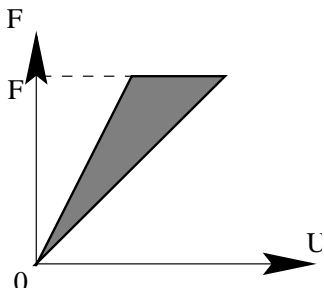
$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_S \underline{F} \cdot \underline{u} dS = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS - \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS$$

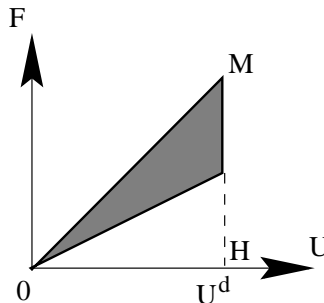
$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS$$

## Cas d'une charge ponctuelle, signification physique

Avec  $\mathcal{R}$ , raideur de la structure,  $\mathcal{C}$  sa souplesse,  $\mathcal{F}$  la force et  $U$  le déplacement :  $\mathcal{F} = \mathcal{R} U$  ;  $U = \mathcal{C} \mathcal{F}$ , avancée à déplacement imposé ou à force imposée :



a. Force imposée



b. Déplacement imposé

*Evaluation de l'énergie mise en jeu lors d'une avancée de fissure*

## Cas d'une charge ponctuelle, expression de $G$

---

- ▶ à déplacement imposé, comme  $\mathcal{F} = \mathcal{R} U^d$  :

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} U^d \right) \cdot U^d = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}^2} \right) \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} \end{aligned}$$

- ▶ à force imposée, comme  $U = \mathcal{C} \mathcal{F}^d$  :

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}^d \cdot \left( \frac{d\mathcal{C}}{d\mathcal{A}} \mathcal{F}^d \right) \end{aligned}$$

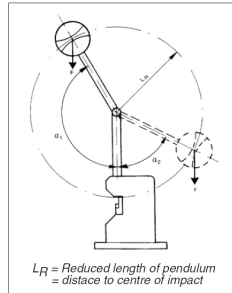
$$G = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{C}}{d\mathcal{A}}$$

## Quelques valeurs critiques de $G$

---

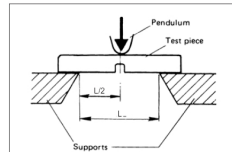
matériau	valeur (J/m <sup>2</sup> )
verre, céramiques	10
résines fragiles	100–500
composites verre–résine	7000
alliages d'aluminium	20000
aciers $> T_{trans}$	100000
métaux purs	$10^5$ à $10^6$

# Essai Charpy : le montage



$L_R$  = Reduced length of pendulum  
= distance to centre of impact

Impact strength



Supports



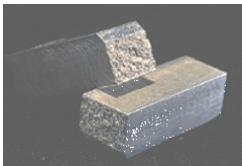


le professeur X/EMP

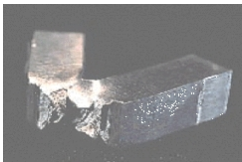


le film

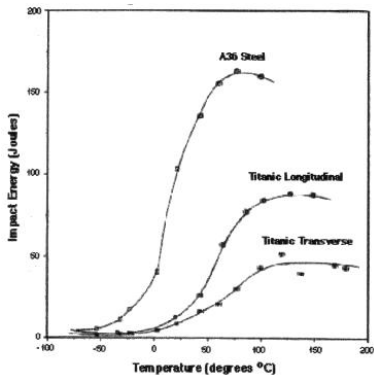
# Essais Charpy sur l'acier du Titanic



*Acier du Titanic*

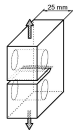


*Acier A36 actuel*

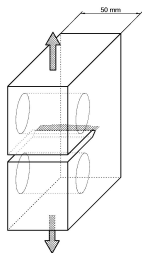


# Autres éprouvettes

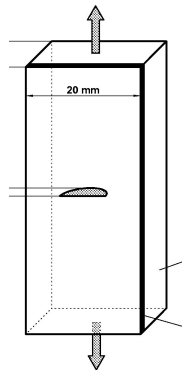
---



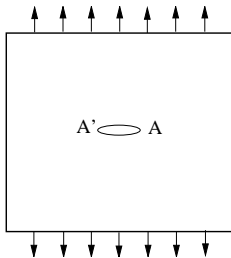
**CT25**



**CT50**



## Solution de Muskhelishvili

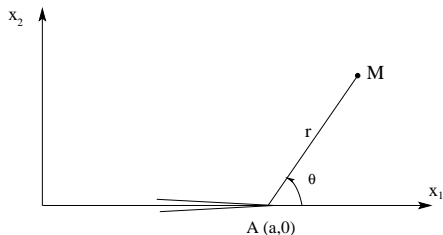


Plaque infinie en traction selon  $x_2$  contenant une fissure de longueur  $2a$  Solution exacte sur l'axe  $x_1$

$$\text{-- Si } x_1 \geq a \quad \sigma_{22} = \sigma_{\infty} / (1 - (a/x_1)^2)^{1/2} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{\infty}$$

$$\varepsilon_{22} = \left( \frac{\sigma_{\infty}}{E} \right) \left( \nu + \frac{1 - \nu}{(1 - (a/x_1)^2)^{1/2}} \right)$$

$$\text{-- Si } 0 \leq x_1 \leq a \quad [u_2] = 2u_2 = \left( \frac{4a\sigma_{\infty}}{E} \right) (1 - (x_1/a)^2)^{1/2}$$



Singularité en  $r^{1/2}$  lorsque  $r$   
tend vers 0 (on pose  
 $x_1 = a + r$ ) :

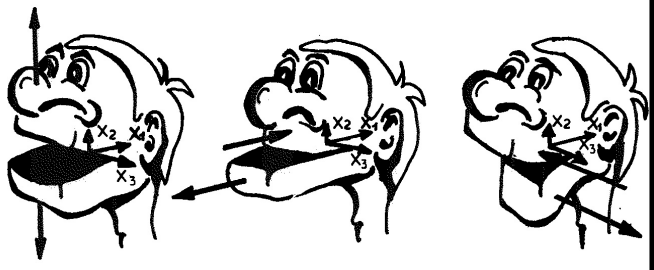
$$\sigma_{22} \propto \sigma_{\infty} (a/2r)^{1/2}$$

Fissure linéaire chargée perpendiculairement à son axe : *mode I*  
*Facteur d'intensité de contrainte en mode I,  $K_I$  :*

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right)$$

## Les 3 modes de sollicitation

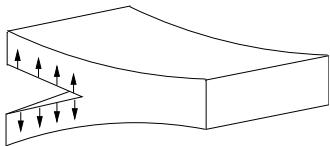
---



Mode I  
charge normale  
perpendiculaire  
au front

Mode II  
cisaillement  
perpendiculaire  
au front

Mode III  
cisaillement  
parallèle  
au front



$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

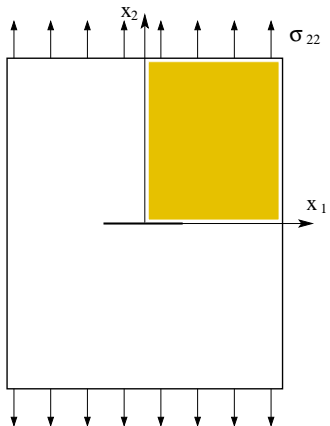
$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2})$$

avec :  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes

et :  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 - \nu}$  en contraintes planes

## Calculs par éléments finis d'une plaque en traction

---

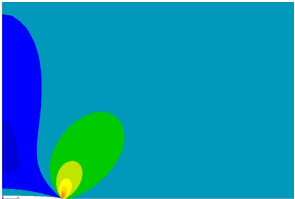


- ▶ Fissure de  $2 \times 4$  mm dans une plaque  $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ .  
 $\sigma_{22} = 100 \text{ MPa}$
- ▶ Par raison de symétrie, on calcule 1/4 de plaque
- ▶ Calculs en contrainte plane et en déformation plane

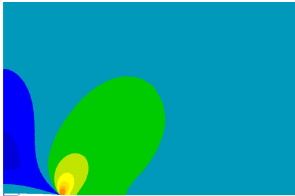


# Champs de contrainte (von Mises) dans une plaque en traction

---

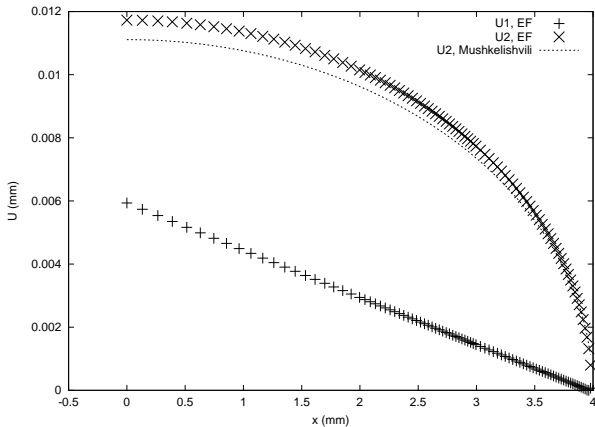


Déformation plane



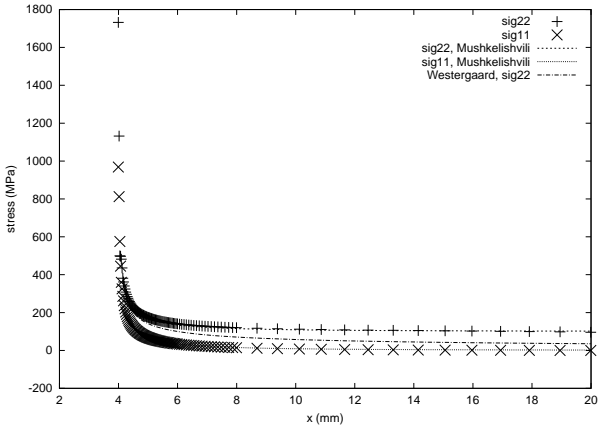
Contrainte plane

# Ouverture de fissure dans une plaque en traction

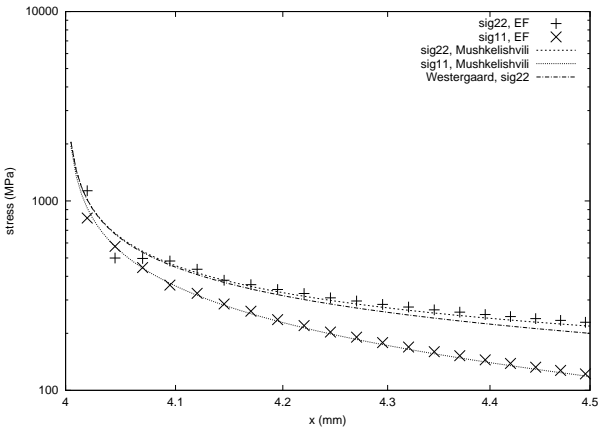


# Contrainte devant la fissure dans une plaque en traction

---

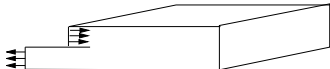


# Contrainte devant la fissure dans une plaque en traction



## Mode II

---



$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2})$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

## Mode III

---



$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$u_3 = -\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

## Remarques

---

- ▶ L'unité de  $K$  est le  $N.m^{-3/2}$ . On utilise couramment le  $MPa.\sqrt{m}$ .
- ▶ L'énergie de déformation élastique reste finie en pointe de fissure :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon} dV \propto \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} r dr d\theta$$

- ▶ En comparant la solution précédente en  $\theta = 0$  et la solution de Muskhelishvili lorsque  $r$  tend vers 0

$$\text{Westergaard : } \sigma_{22} \propto \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad ; \quad \text{Muskhelishvili : } \sigma_{22} \propto \sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{2r}}$$

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

## Remarques (suite)

---

- ▶ **Ne pas confondre**  $K_I$  avec  $K_t$ , *facteur de concentration de contrainte*, sans dimension, Au voisinage d'un défaut elliptique de longueur  $2a$  et de rayon de courbure  $\rho$  :

$$K_t = \sigma_{22max} / \sigma_\infty = 2\sqrt{a/\rho}$$

- Exemple

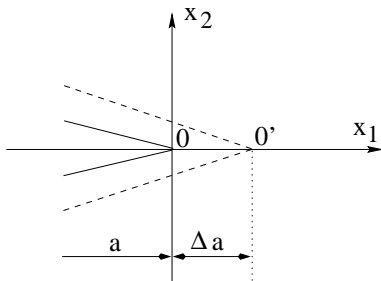
- ▶ Matériaux anisotropes :

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}$$

(couplage possible entre les modes)



## Relation entre $K$ et $G$ en mode I



Travail nécessaire pour refermer une fissure de longueur  $a + \Delta a$

- ▶ La densité d'effort sur le segment  $OO'$  passe de 0 (fissure en  $O'$ ) à  $\sigma_{22}$  (fissure est en  $O$ ) pendant que l'ouverture passe de  $u_2$  à 0
- ▶ il vient

$$G = K_I^2(k + 1) / 8\mu$$

$$\text{en déf.plane : } k = 3 - 4\nu \quad \text{en contr.plane : } k = \frac{3 - \nu}{1 - \nu}$$

## Relation entre $K$ et $G$

---

► Mode I

$$\text{Contraintes planes : } G = K_I^2/E$$

$$\text{Déformations planes : } G = (1 - \nu^2)K_I^2/E$$

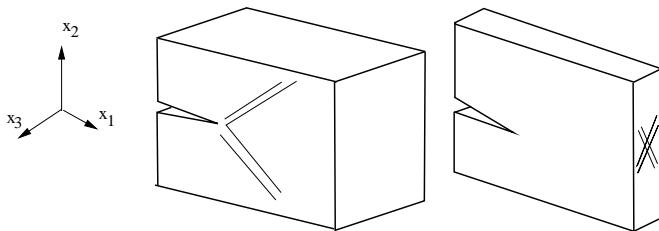
► Plusieurs modes

$$\text{Contraintes planes : } G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E}K_{III}^2$$

$$\text{Déformations planes : } G = \frac{1 - \nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E}K_{III}^2$$

## Etat de contrainte tridimensionnel

---



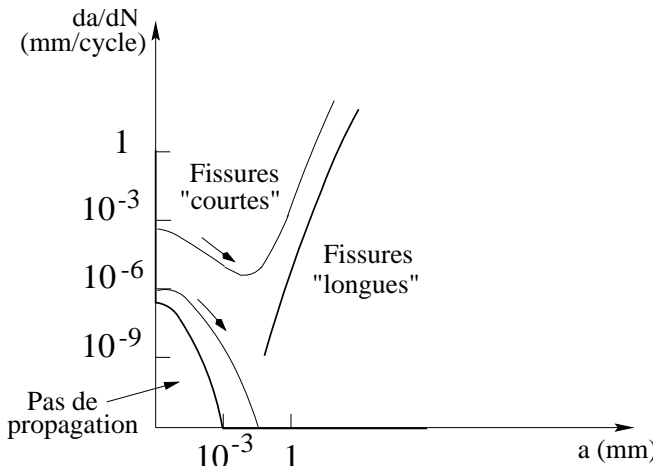
Structures épaisses

$0 < \sigma_{11} < \sigma_{33} < \sigma_{22}$ .  
Glissement dans  $x_1 - x_2$

Structures minces

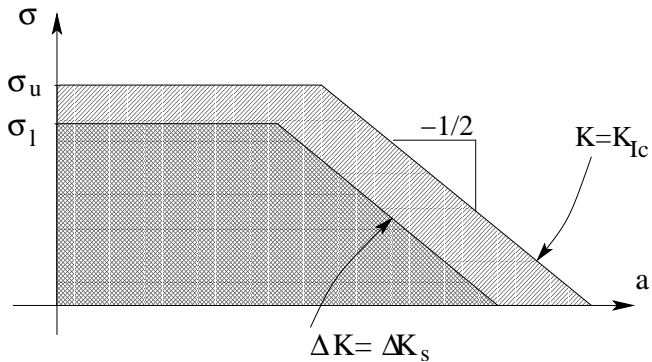
$0 < \sigma_{33} \approx 0 < \sigma_{11} < \sigma_{22}$   
glissement dans  $x_2 - x_3$ ,

## Propagation de fissure en fatigue



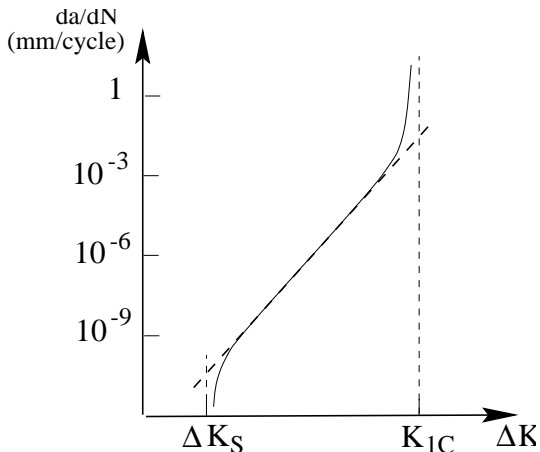
## Diagramme de Kitagawa

---



## Loi de Paris

---



$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m$$

## Valeur critique et valeur seuil du facteur d'intensité de contrainte

---

Matériau	$K_{Ic}$ MPa $\sqrt{m}$	$\Delta K_s$ MPa $\sqrt{m}$
acier haute résistance (ex : 35NCD16)	60	1 à 4
acier moyenne.résistance (ex : 15MND6) ...		
...(basse température)	40	3
...(palier ductile)	200	8
alliages d'aluminium (ex : 7075)	30	1,5 à 4
alliages de titane (ex : TA6V)	80	2 à 8
composite verre-résine	7	
polyéthylène	6,5	
polystyrène	0,4	
résine époxyde	0,1	
verre	0,01	