

## COMPOSITES A FIBRES LONGUES

### I. Réservoir sous pression <sup>1</sup>

On considère un réservoir cylindrique sous pression formé d'une enveloppe mince de révolution, qui, en section courante, comporte des fibres de verre selon deux directions faisant un angle  $\pm\alpha$  par rapport à l'axe du réservoir. Les fibres sont disposées en couches alternées, noyées dans une matrice de résine, dont on négligera la contribution mécanique. Il y a un nombre égal de couches dans chaque direction. La pression interne vaut  $p$ . L'épaisseur et le rayon moyen de l'enveloppe valent respectivement  $e$  et  $R$  (avec  $e \ll R$ ).

- 1.1 Donner l'expression du tenseur de contrainte sur l'enveloppe en coordonnées cylindriques (on se placera en fait dans le repère  $(z-\theta)$ ) en fonction de  $p$ ,  $e$  et  $R$ .

Voir le [mini-formulaire d'élasticité](#). On trouve, en tenant compte de l'«effet de fond» :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{e} \quad \sigma_{zz} = \frac{pR}{2e}$$

- 1.2. Les modules transversaux étant nuls dans chaque couche, l'état de contrainte est approximativement uniaxial dans chaque couche, la seule composante non nulle correspondant à la direction  $n$  des fibres. Etablir les relations entre  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ .

La contribution de la couche, dont les fibres font un angle  $\theta$  avec la direction  $z$  des génératrices, est telle que (en notant  $c = \cos\alpha$ ,  $s = \sin\alpha$ ) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{z\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2\sigma_{nn} \\ s^2\sigma_{nn} \\ cs\sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

On observe donc que le terme de cisaillement va disparaître lors de la moyenne entre les deux couches (angles  $\theta$  et  $-\theta$ ), si bien que le résultat final est simplement :

$$\sigma_{zz} = c^2\sigma_{nn} \quad \sigma_{\theta\theta} = s^2\sigma_{nn}$$

- 1.3. A l'aide des résultats des deux questions précédentes, déterminer l'angle optimal  $\alpha$  que doivent faire les fibres avec les génératrices du cylindre. Quelle est alors la contrainte dans les fibres en fonction de  $p$ ,  $e$  et  $R$  ?

L'angle optimal sera donc celui pour lequel chacune des deux contraintes  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  charge les fibres de façon équivalente. On vérifie alors :

$$c^2\sigma_{nn} = \frac{pR}{2e} \quad s^2\sigma_{nn} = \frac{pR}{e}$$

Soit :

$$\tan^2 \alpha = 2 \quad \alpha \approx 54.7^\circ$$

- 1.4. En appelant  $\sigma_u$  la contrainte à rupture de la fibre, calculer successivement la quantité de fibre nécessaire et l'épaisseur  $d$  de l'enveloppe, sachant que la fraction volumique de fibres dans le composite est de 80%.

<sup>1</sup>Cet exercice est inspiré de celui de D. Gay, Matériaux composites, Hermès, 1991, p.433

Application numérique :  $R=80\text{cm}$  ;  $p=200\text{bars}$  ;  $\sigma_u= 3200\text{ MPa}$ .

On a alors :

$$\sigma_u = \frac{3 pR}{2 e} \quad e = \frac{3 pR}{2 \sigma_u}$$

Application numérique :

$$e = \frac{3 pR}{2 \sigma_u} = 3.75\text{mm} \quad \approx 4.7\text{mm}$$

## II. Coefficient de dilation d'un composite à fibres longues

On considère un composite à fibres longues comportant une fraction volumique  $f$  de fibres. La matrice et la fibre ont des coefficients de dilatation très différents, que l'on supposera isotropes (respectivement  $\alpha_m$  et  $\alpha_f$ ). En raison de la géométrie du matériau, on suppose que l'état de contrainte qui se développe est uniaxial, dans le sens des fibres. On caractérise donc uniquement le module longitudinal des fibres,  $E_f$ , et le coefficient de Poisson correspondant,  $\nu_f$ . La matrice est quant à elle caractérisée par  $E_m$  et  $\nu_m$ . Les fibres sont disposées selon l'axe  $x_1$ .

2.1. *Donner une estimation de l'état de contrainte dans le matériau lorsque, partant d'un état initial libre de déformations et de contraintes, on applique une différence de température uniforme de  $\Delta T$ .*

On note respectivement  $\sigma^f$  et  $\sigma^m$  les seules composantes non nulles des tenseurs de contraintes (respectivement  $\sigma_{11}^f$  dans la fibre et  $\sigma_{11}^m$  dans la matrice). Les déformations longitudinales seront alors  $\epsilon_{11}^f$  et  $\epsilon_{11}^m$ , les déformations transversales  $\epsilon_{22}^f$  et  $\epsilon_{22}^m$ . La résultante selon l'axe 1 est nulle, et les déformations selon l'axe 1 sont égales. Donc :

$$f\sigma^f + (1-f)\sigma^m = 0 \quad \epsilon_{11}^f = \epsilon_{11}^m = \epsilon_{11}$$

La déformation se décompose en une part élastique et une part thermique, soit :

$$\frac{\sigma^f}{E_f} + \alpha_f \Delta T = \frac{\sigma^m}{E_m} + \alpha_m \Delta T$$

La résolution du système en contraintes donne, en posant

$$\bar{E} = fE_f + (1-f)E_m :$$

$$\sigma^f = (1-f) \frac{E_m E_f}{\bar{E}} (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T \quad \sigma^m = -\frac{f}{1-f} \sigma^f = -f \frac{E_m E_f}{\bar{E}} (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T$$

2.2. *En déduire les coefficients de dilatation moyens en direction longitudinale et transversale.*

En reportant les résultats précédents dans l'expression de  $\epsilon_{11}$ , on introduit le coefficient de dilatation longitudinale  $\alpha^L$  :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^f = (1-f) \frac{E_m}{\bar{E}} (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T + \alpha_f \Delta T = \frac{f\alpha_f E_f + (1-f)\alpha_m E_m}{\bar{E}} \Delta T = \alpha^L \Delta T$$

La déformation transverse  $\epsilon_{22}$  est la moyenne des déformations de chaque phase :

$$\epsilon_{22} = f\epsilon_{22}^f + (1-f)\epsilon_{22}^m = f\left(-\nu_f \frac{\sigma^f}{E_f} + \alpha_f \Delta T\right) + (1-f)\left(-\nu_m \frac{\sigma^m}{E_m} + \alpha_m \Delta T\right)$$

Il vient alors, en posant  $\bar{\alpha} = f\alpha_f + (1-f)\alpha_m$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} &= \left( f\sigma^f \left( -\frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_m}{E_m} \right) + \bar{\alpha} \right) \Delta T \\ &= \left( \frac{f(1-f)(\nu_m E_f - \nu_f E_m)(\alpha_m - \alpha_f)}{\bar{E}} + \bar{\alpha} \right) \Delta T \quad \text{si bien} \\ &= \alpha^T \Delta T \end{aligned}$$

qu'on obtient un encadrement de  $\alpha$  :

$$\alpha^T = \frac{f(1-f)(\nu_m E_f - \nu_f E_m)(\alpha_m - \alpha_f)}{\bar{E}} + \bar{\alpha}$$

$$\alpha^T \leq \alpha \leq \alpha^L$$

$$\alpha^L = \frac{f\alpha_f E_f + (1-f)\alpha_m E_m}{\bar{E}}$$

On a tracé figure 1 les courbes résultantes pour les différentes estimations et bornes, dans le cas d'un composite verre-résine polyester. On observe que l'estimation faite selon le sens transverse est au dessous de la borne minimale (!). Cela remet en cause les hypothèses de la comparaison :

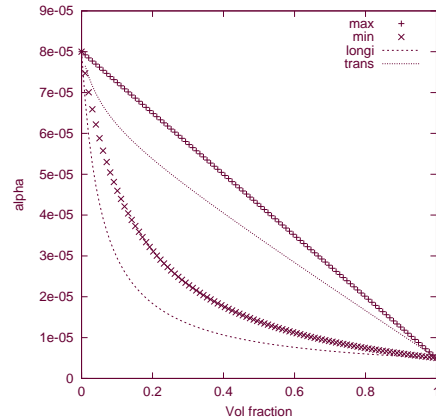


Figure 1 : courbes obtenues pour un composite fibre de verre-résine polyester, avec :

$$E_f = 74000 \text{ MPa}, \nu_f = 0.25, \alpha_f = 5.10^{-6}, E_m = 4000 \text{ MPa}, \nu_m = 0.4, \alpha_m = 8.10^{-5}.$$

- d'une part, supposer le champ uniaxial est trop réducteur ;  
- par ailleurs, l'expression de la borne inférieure utilisée ici est trop simple. Le matériau étant anisotrope, il faut aussi tenir compte d'un terme déviatorique pour mesurer le coefficient de dilatation thermique, qui devient alors un tenseur.

2.3. Une approche plus générale du problème, mais appliquée dans le cadre d'un matériau isotrope, montre que le coefficient de dilatation homogénéisé d'un composite biphasé,  $\alpha^h$ , composé des matériaux 1 et 2, vaut :

$$\alpha^h = \langle \alpha \rangle + \frac{1/K^h - \langle 1/K \rangle}{1/K_1 - 1/K_2} (\alpha_1 - \alpha_2).$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est une opération de moyenne arithmétique, et où  $K_f$  et  $K_m$  désignent respectivement les modules de compressibilité des matériaux 1 et 2. Les valeurs de  $K^h$  sont encadrées par les bornes de Voigt et Reuss, ce qui fournit donc un encadrement de  $\alpha^h$ . Avec les notations précédentes, on obtient successivement, pour  $K^h$  :

$$\frac{1}{(1-f)K_m + fK_f} \leq \frac{1}{K^h} \leq \frac{1-f}{K_m} + \frac{f}{K_f}$$

et pour  $\alpha^h$  :

$$\bar{\alpha} + \frac{1}{(1-f)K_m + fK_f} - \left( \frac{1-x}{K_m} + \frac{x}{K_f} \right) (\alpha_f - \alpha_m) \leq \alpha^h \leq \bar{\alpha}$$

$$\text{avec } \bar{\alpha} = \langle \alpha \rangle = (1-x)\alpha_m + x\alpha_f$$

Vérifier que, si  $\nu_f = \nu_m$ , la borne min correspond à la valeur préalablement estimée en sens travers.

La courbe figure 2 montre comment se transforme la courbe

précédente lorsque l'on ramène la valeur de  $\nu_m$  à 0.25, ce qui conduit à  $\nu_m = \nu_f$ . L'estimation transverse est bien sur la borne minimale.

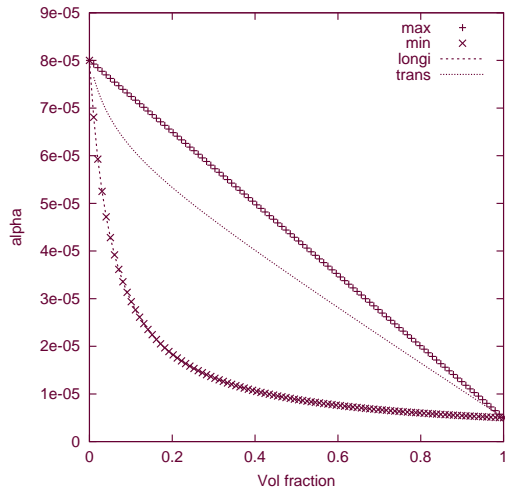


Figure 2 : Courbes obtenues lorsque les coefficients de Poisson sont

égaux :

$$E_f=74000 \text{ MPa}, \nu_f=0.25, \alpha_f=5.10^{-6}, E_m=4000 \text{ MPa}, \nu_m=0.25, \\ \alpha_m=8.10^{-5}.$$

#### 2.4. Application numérique

Tracer en fonction de la fraction volumique de fibres les deux

estimations précédentes et les deux bornes de la question 3, pour le cas d'un composite fibre de verre-résine ( $E_f=74000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_f=0.25$ ,  $\alpha_f=5.10^{-6}$ ,  $E_m=4000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_m=0.4$ ,  $\alpha_m=8.10^{-5}$ ). Discuter.

**III. Assemblage collé** Afin de pouvoir saisir une éprouvette en composite entre les mors d'une machine de traction, on réalise un collage entre deux plaques d'aluminium. Comme l'indique la figure 3, il y a donc deux joints de colle, de part et d'autre de l'éprouvette en composite. Les plaques d'aluminium ont chacune une épaisseur de  $e_1$ , l'épaisseur de l'éprouvette en matériau composite est  $2e_2$ . Les couches de colle ont

chacune une épaisseur  $h$ , le recouvrement entre les plaques porte sur une distance  $l$ . L'axe  $x_1$  est l'axe de traction de l'éprouvette, l'axe  $x_3$  est normal au plan de l'éprouvette. On suppose que l'ensemble est de faible dimension en direction  $x_2$ , ce qui autorise à tenter une modélisation dans le plan  $x_1-x_3$ , en négligeant les efforts en direction 3. On supposera que toutes les forces et les déplacements dépendent uniquement de  $x_1$ .

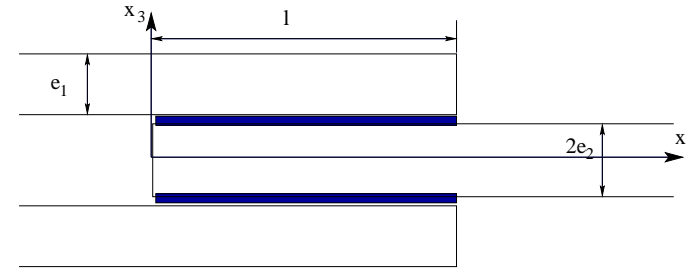


Figure 3 : collage composite - plaques aluminium

Les modules de la plaque composite et de l'aluminium étant grands par rapport à celui de la colle, il est raisonnable de supposer que la colle est cisailée (glissement simple) entre les plaques, dans lesquelles les segments initialement parallèles à  $x_3$  restent parallèles pendant la traction (force  $F$ ).

3.1. En considérant successivement l'équilibre d'une tranche ( $dx_1-e_1$ ) d'aluminium, et ( $dx_1-e_2$ ) de composite, autour du joint supérieur de colle, donner les relations entre les forces de traction par unité d'épaisseur  $N_1$  et  $N_2$ , dans l'aluminium et dans le composite, et le cisaillement à l'interface,  $\tau$ .

La première équation d'équilibre, intégrée sur les petits volumes considérés, donnent :

$$\int (\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3}) dx_1 dx_3 = 0$$

Il s'agit d'un cas simplifié de théorie des poutres, dans lequel ne subsiste que l'effort normal dans la section de la poutre, mais avec

une sollicitation extérieure tangente à la surface. Le premier terme de l'intégrale correspond à la dérivée de l'effort normal par rapport à  $x_1$ . On transforme le second terme en intégrale sur le contour. Il vient donc un terme en  $\sigma_{13}n_3$ ,  $n_3$  étant la normale à la surface chargée en cisaillement. Ce terme vaut donc  $-\tau$  pour l'élément de volume d'aluminium (normale (0,-1)), et  $\tau$  pour la plaque composite. Il vient donc :

$$N_{1,1} + \tau = 0 \quad N_{2,1} - \tau = 0$$

Si on suppose que le déplacement horizontal est le même en tout point des plaques, et qu'on le désigne par  $U_1$  dans l'aluminium et par  $U_2$  dans le composite, il vient :

$$N_1 = E_1 e_1 U_{1,1} \quad N_2 = E_2 e_2 U_{2,1}$$

### 3.2. Proposer un champ de déplacement pour la colle, et en déduire la relation entre les déplacements des plaques et le cisaillement $\tau$ .

En supposant que la colle est en glissement simple, la valeur du cisaillement produit (petites déformations) est :

$$\gamma = \frac{U_2 - U_1}{h} = \frac{\tau}{\mu_c}$$

D'où on déduit :

$$\frac{h}{\mu_c} \tau_{,1} = U_{2,1} - U_{1,1} = \frac{N_2}{E_2 e_2} - \frac{N_1}{E_1 e_1} = y(x_1)$$

Les relations entre les efforts normaux et  $\tau$  se recombinaient de la façon suivante :

$$\frac{N_{1,1}}{E_1 e_1} + \frac{\tau}{E_1 e_1} = 0 \quad \frac{N_{2,1}}{E_2 e_2} - \frac{\tau}{E_2 e_2} = 0$$

soit :

$$y = \left( \frac{1}{E_1 e_1} + \frac{1}{E_2 e_2} \right) \tau$$

### 3. Trouver l'équation différentielle du second ordre que vérifie la fonction $y$ de $x_1$ telle que :

$$y = \frac{N_2}{E_2 e_2} - \frac{N_1}{E_1 e_1}$$

L'équation est donc finalement :

$$y_{,11} - \omega^2 y = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{\mu_c}{h} \left( \frac{1}{E_1 e_1} + \frac{1}{E_2 e_2} \right)$$

dont la solution générale est :

$$y = a \cosh \omega x_1 + b \sinh \omega x_1$$

Les conditions aux limites sont :

- en  $x_1 = 0$ ,  $N_1 = F$ ,  $N_2 = 0$ , soit  $y = -\frac{F}{E_1 e_1} = a$ ;

- en  $x_1 = l$ ,  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = F$ , soit  $y = \frac{F}{E_2 e_2} = a \cosh \omega l + b \sinh \omega l$

L'application de ces conditions aux limites conduit à :

$$y = -\frac{F}{E_1 e_1} \cosh \omega x_1 + F \frac{\sinh \omega x_1}{\sinh \omega l} \left( \frac{1}{E_2 e_2} + \frac{1}{E_1 e_1} \cosh \omega l \right)$$

### 4. Intégrer cette équation, et déterminer les constantes d'intégration en $x_1 = 0$ et $x_1 = l$ .

On trouve enfin le cisaillement en prenant la dérivée de  $y$  :

$$\tau = \frac{F \mu}{\omega h} \left( -\frac{\sinh \omega x_1}{E_1 e_1} + \frac{\cosh \omega x_1}{\sinh \omega l} \left( \frac{1}{E_2 e_2} + \frac{\cosh \omega l}{E_1 e_1} \right) \right)$$

La courbe fonction de  $x_1$  présente des valeurs maximum aux deux extrémités du collage. On a respectivement :

$$\begin{aligned} - \text{ en } x_1 = 0, \tau(0) &= \frac{F\mu}{\omega h} \left( \frac{1}{E_2 e_2 \sinh \omega l} + \frac{1}{E_1 e_1 \tanh \omega l} \right); \\ - \text{ en } x_1 = l, \tau(l) &= \frac{F\mu}{\omega h} \left( \frac{1}{E_2 e_2 \tanh \omega l} + \frac{1}{E_1 e_1 \sinh \omega l} \right). \end{aligned}$$

Dans la plupart des configurations numériques, le terme en  $\sinh$  est très grand, et  $\tanh \approx 1$ . L'efficacité maximum du système commande que les produits  $E_1 e_1$  et  $E_2 e_2$  soient égaux. La rupture éventuelle d'un collage débute donc à partir des bords. On peut diminuer les efforts en considérant un recouvrement plus long. La figure ci-dessous montre la courbe obtenue pour les conditions préconisées.

5. Déterminer l'expression du cisaillement  $\tau$  et la tracer en fonction de  $x_1$  sur l'intervalle  $(0 : l)$ . Discuter le paradoxe concernant les conditions aux limites pour  $\tau$  en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$ .

Le cisaillement calculé ici n'est donc pas nul sur les faces verticales du joint de colle, qui sont pourtant des surfaces libres. On retrouve donc bien dans ce calcul approché le problème classique du cisaillement dans les théories de poutre. En fait, si la surface est libre, la forme du bord n'est pas linéaire, comme supposé dans les hypothèses pour construire le cisaillement. Des calculs de structures montrent néanmoins que les résultats d'un calcul complet se raccordent très rapidement à ceux qui sont trouvés ici, si bien que le niveau de la concentration de contrainte est bien réaliste. Il représente en particulier une bien meilleure approximation que celle qui consisterait à répartir uniformément le cisaillement sur l'ensemble

du joint.

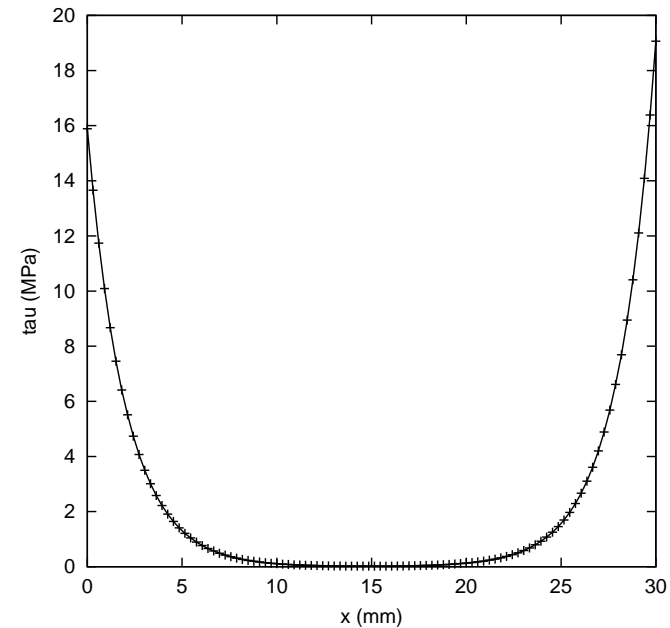


Figure 4 : Evolution du cisaillement à l'interface aluminium-composite ; conditions du calcul pour l'aluminium,  $E_1 = 75000 \text{ MPa}$ ,  $e_1 = 2. \text{ mm}$  ; pour le stratifié,  $E_2 = 100000 \text{ MPa}$ ,  $e_2 = 1.25 \text{ mm}$  ; pour la colle (araldite),  $\mu_c = 1700 \text{ MPa}$ ,  $h = 0.1 \text{ mm}$ ,  $l = 30 \text{ mm}$  ; force par unité d'épaisseur,  $F = 70 \text{ MPa/mm}$