

## PLAQUE MULTICOUCHE

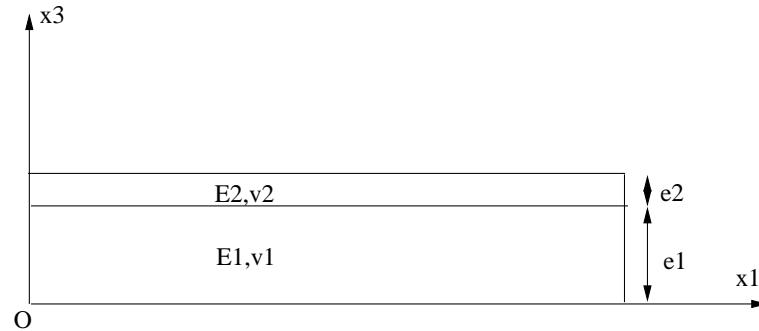


Figure 1 : Géométrie de la plaque composite

Le but de cet exercice est d'examiner la courbure d'une plaque multicouche circulaire sous l'effet d'un changement de température. La plaque est composée de deux couches homogènes : le dépôt et le substrat qui ont successivement des épaisseurs  $e_1$  et  $e_2$ , des modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$ , et des coefficients de Poisson  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La température initiale est notée  $T_0$ . Comme la distribution des matériaux dans l'épaisseur n'est pas symétrique, le simple changement de température va générer une courbure de la plaque, et des contraintes thermomécaniques autoéquilibrées à l'intérieur des couches, même en présence d'un champ de température uniforme.

1. Rappeler les équations générales valides pour une plaque composite, dans le cadre de la théorie de plaque de Love-Kirchhoff. Commenter les différences présentes au niveau des équations d'équilibre et de comportement entre une plaque homogène et une plaque composite. Ecrire les équations de comportement pour la plaque composite qui prennent en compte la dilatation thermique.

La cinématique d'une plaque de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$u_1 = U + \theta_2 x_3$$

$$u_2 = V - \theta_1 x_3$$

$$u_3 = W$$

Les déformations s'expriment donc comme :

$$\varepsilon_{11} = U_{,1} + \theta_{2,1} x_3$$

$$\varepsilon_{22} = V_{,2} - \theta_{1,2} x_3$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

$$2\varepsilon_{12} = U_{,2} + \theta_{2,2} x_3 + V_{,1} - \theta_{1,1} x_3$$

$$2\varepsilon_{23} = -\theta_1 + W_{,2}$$

$$2\varepsilon_{31} = \theta_2 + W_{,1}$$

Les équations d'équilibre de la plaque homogène et de la plaque composite restent les mêmes :

$$N_{11,1} + N_{12,2} = 0$$

$$N_{12,1} + N_{22,2} = 0$$

$$M_{11,11} + M_{22,22} + 2M_{12,12} + p = 0$$

Dans les plaques de Kirchhoff-Love, on ne s'intéresse qu'aux composantes 11, 22, 12 des tenseurs de contraintes et de déformations. Désormais pour simplifier l'écriture, on note :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

On introduit les notions de déformation transversale et rotation transversale généralisées :

$$\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} U_{,1} \\ V_{,2} \\ U_{,2} + V_{,1} \end{pmatrix} \quad \underline{\chi} = \begin{pmatrix} \theta_{2,1} \\ \theta_{1,2} \\ \theta_{2,2} - \theta_{1,1} \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\gamma} + \underline{\chi}x_3$$

La loi de Hooke s'écrit dans ce cas, en prenant en compte la déformation thermique :

$$\underline{\sigma} = \underline{S}_i^{-1}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th})$$

où  $\underline{S}_i$  est le tenseur de souplesse du matériau  $i$ . Pour un matériau homogène isotrope, ce tenseur s'écrit :

$$\underline{S}_i = \begin{pmatrix} 1/E_i & -\nu_i/E_i & 0 \\ -\nu_i/E_i & 1/E_i & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_i \end{pmatrix}$$

$$\underline{S}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_i + 2\mu_i & \lambda_i & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i + 2\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i \end{pmatrix}$$

Par définition, on obtient ainsi les équations de comportement de la plaque :

$$\underline{N} = \int \underline{\sigma} dx_3 = \underline{\gamma} \int \underline{S}_i^{-1} dx_3 + \underline{\chi} \int \underline{S}_i^{-1} x_3 dx_3 - \int \underline{S}_i^{-1} \underline{\varepsilon}^{th} dx_3$$

$$\underline{M} = \int \underline{\sigma} x_3 dx_3 = \underline{\gamma} \int \underline{S}_i^{-1} x_3 dx_3 + \underline{\chi} \int \underline{S}_i^{-1} x_3^2 dx_3 - \int \underline{S}_i^{-1} \underline{\varepsilon}^{th} x_3 dx_3$$

Sous forme matricielle, il vient :

$$\begin{pmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \underline{S}_i^{-1} dx_3 & \int \underline{S}_i^{-1} x_3 dx_3 \\ \int \underline{S}_i^{-1} x_3 dx_3 & \int \underline{S}_i^{-1} x_3^2 dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int \underline{S}_i^{-1} \underline{\varepsilon}^{th} dx_3 \\ \int \underline{S}_i^{-1} \underline{\varepsilon}^{th} x_3 dx_3 \end{pmatrix}$$

Si bien que :

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ -M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix}$$

2. Dans la suite, on considère que la couche de dépôt est très mince par rapport à celle de substrat. Cela conduit à supposer qu'il y a uniquement un effort normal dans la couche de dépôt, et que le moment y est nul. En écrivant l'équilibre des efforts pour une section droite de la plaque multicouche, déterminer l'effort normal  $N^s$  et le moment fléchissant  $M^s$  dans la couche de substrat en fonction de l'effort normal  $N$  dans la couche de dépôt ? On examine alors la couche de substrat seule. Ecrire l'équation de comportement pour la couche de substrat, en déduisant la relation entre  $N$  et la rotation  $\chi$  de la couche.

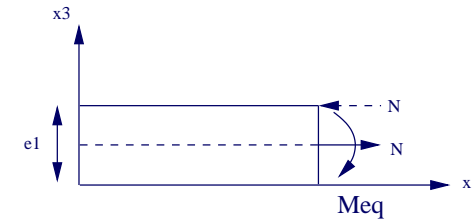


Figure 1 : Schéma de calcul

Dans ce cas, la plaque redevient monocouche et homogène. L'effet de la température se résume à un effort normal dans la couche dont on néglige l'épaisseur, qui transmet en fait un effort tangentiel à la partie restante de la plaque. L'équilibre dans chaque section du multicouche fournit :

$$\Sigma M = M^s - N \frac{e_1}{2} = 0$$

$$\Sigma N = N^s + N = 0$$

Les efforts dans la couche de substrat sont alors :

$$M^s = N \frac{e_1}{2}$$

$$N^s = -N$$

L'équation de comportement pour la couche homogène devient :

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^s \\ \underline{M}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\underline{S}_1} \underline{S}_1^{-1} dx_3 & 0 \\ 0 & \int_{\underline{S}_1} \underline{S}_1^{-1} x_3^2 dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_{\underline{S}_1} \underline{S}_1^{-1} \underline{\epsilon}^{th} dx_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans les conditions du problème de chargement biaxial, on a :

$$N_{11}^s = N_{22}^s = -N \quad N_{12}^s = 0$$

$$M_{11}^s = M_{22}^s = M^s = N \frac{e_1}{2} \quad M_{12}^s = 0$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{12} = 0$$

$$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi \quad \chi_{12} = 0$$

Si bien que :

$$\underline{M}^s = \underline{S}_1^{-1} e_1^3 / 12 \underline{\chi}$$

$$\underline{\chi} = \frac{12}{e_1^3} \underline{S}_1 \underline{M}^s = \frac{12}{e_1^3} \frac{1 - \nu_1}{E} M^s = \frac{6}{e_1^2} \frac{1 - \nu_1}{E} N$$

En notant  $\chi = 1/R$  la courbure causée par  $N$ , on retrouve la *formule de Stoney*, qui donne la relation entre  $N$  et le rayon de courbure :

$$N = \frac{1}{R} \frac{E_1 e_1^2}{6(1 - \nu_1)}$$

Si la plaque a une courbure initiale, on a :

$$N = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{E_1 e_1^2}{6(1 - \nu_1)}$$

*Remarques :*

Dans ce cas, l'axe neutre de la plaque multicouche n'est pas au centre de

la plaque. La position où la contrainte est nulle se trouve dans la couche de substrat, au 1/3 de la section vers la couche de dépôt :

$$\frac{N^s}{E_1 e_1} + \frac{12 M^s (e_1/2 - x_3)}{E_1 e_1^3} = 0$$

$$x_3 = \frac{2e_1}{3}$$

3. *Retourner au problème de la plaque bicouche. On observe que, sur de grandes plaques, de diamètre 200 à 300 mm, la flexion s'effectue selon une direction préférentielle. Cela conduit à reconsidérer les conditions aux limites axisymétriques, et à utiliser à la place une hypothèse de déformation plane. La plaque est libre sur ses bords. On effectue un changement de température de  $t_0$  à  $T = T_1$  pour toute la structure. Déterminer les champs des efforts et des déformations généralisés. Déterminer le rayon de la courbure de la plaque.*

*Application numérique pour une plaque de 30 cm de diamètre, qui consiste en un substrat en silicium et un dépôt de nickel :  $E_1 = 112$  GPa,  $E_2 = 207$  GPa,  $\nu_1 = 0.25$ ,  $\nu_2 = 0.31$ ,  $e_1 = 200$   $\mu$ m,  $e_2 = 50$  nm,  $\alpha_1 = 3.10^{-6}$ /degreC,  $\alpha_2 = 13.10^{-6}$ /degreC,  $T_0 = 300^\circ$ C,  $T_1 = 20^\circ$ C.*

Dans le cas de la déformation plane, les équations d'équilibre deviennent :

$$N_{11,1} = 0 \quad M_{11,11} = 0$$

Avec les conditions limites de bords libres, il vient :  $N_{11} = 0$ ,  $M_{11} = 0$ , et les équations de comportement s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ M_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i) dx_3 & \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i) x_3 dx_3 \\ \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i) x_3 dx_3 & \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i) x_3^2 dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix}$$

$$- (T_1 - T_0) \begin{pmatrix} \int_0^{e_1+e_2} (2\lambda_i + 2\mu_i) \alpha_i dx_3 \\ \int_0^{e_1+e_2} (2\lambda_i + 2\mu_i) \alpha_i x_3 dx_3 \end{pmatrix}$$

On peut réécrire les équations de comportement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ M_{11} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} - (T_1 - T_0)B$$

Les déformations généralisées sont calculées :

$$\begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} N_{11} \\ M_{11} \end{pmatrix} + A^{-1}B(T_1 - T_0) = A^{-1}B(T_1 - T_0)$$

Les constantes de  $A$  et  $B$  sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i) dx_3 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)e_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)e_2 \\ \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i)x_3 dx_3 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{e_1^2}{2} + (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{(e_1 + e_2)^2 - e_1^2}{2} \\ \int_0^{e_1+e_2} (\lambda_i + 2\mu_i)x_3^2 dx_3 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{e_1^3}{3} + (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{(e_1 + e_2)^3 - e_1^3}{3} \\ \int_0^{e_1+e_2} (2\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i dx_3 &= (2\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 e_1 + (2\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 e_2 \\ \int_0^{e_1+e_2} (2\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i x_3 dx_3 &= (2\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \frac{e_1^2}{2} \\ &\quad + (2\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \frac{(e_1 + e_2)^2 - e_1^2}{2} \end{aligned}$$

Le rayon de courbure est calculé à partir de :

$$\frac{1}{R} = \theta_{2,1}$$

4. Peut on utiliser la formule de Stoney pour calculer l'effort normal dans la couche de dépôt ? Sinon, établir la formule dans ce cas.

La formule de Stoney a été établie en chargement biaxial, dans ce cas de déformation plane, on ne peut pas utiliser cette formule. Dans ce cas on a :

$$\chi = \frac{12}{e_1^3} \frac{1}{E} M^{eq} = \frac{6}{e_1^2} \frac{1}{E} N$$

Donc la formule dans le cas de déformation plane :

$$N = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{E_1 e_1^2}{6}$$