

Table des matières

8	Structures et matériaux composites	77
8.1	Les composants élémentaires des matériaux composites	78
8.1.1	Renforts	78
8.1.2	Matrices	79
8.2	Rappel : milieux élastiques anisotropes	80
8.2.1	Notation de Voigt pour les relations de comportement	80
8.2.2	Respect des symétries matérielles	80
8.3	Composites unidirectionnels à fibres longues	82
8.3.1	Loi de mélange	82
8.3.2	Constantes élastiques dans un repère quelconque	82
8.3.3	«Fonctionnement» du composite	83
8.3.4	Quelques ordres de grandeur	84
8.4	Plaques stratifiées	84
8.4.1	Tissus et mats	84
8.4.2	Définition	84
8.4.3	Théorie des stratifiés	85
8.5	Plaque de Kirchhoff–Love	87

Chapitre 8

Structures et matériaux composites

Au sens strict du terme, il faut parler de matériau ou de structure composite dès lors qu'une pièce est constituée de plusieurs types de constituants. Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériau en vue d'obtenir des propriétés moyennes améliorées. Les métaux sont en général *tenaces* (ils présentent une bonne résistance à la propagation brutale de fissures) et *ductiles* (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de *masse volumique élevée*. Les matières plastiques sont *légères* mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont *rigides et résistantes*, mais *fragiles*. L'art de l'ingénieur dans la conception et l'utilisation de matériaux ou de structures composites réside dans le fait de placer le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition spatiale).

Les composites sont donc intrinsèquement des matériaux hétérogènes. Pris sous cette acception, le terme "composite" recouvre pratiquement l'ensemble des matériaux. Ainsi les matériaux métalliques eux-mêmes sont des alliages, composés de plusieurs phases, de microstructure et/ou de composition distinctes : il suffit de changer d'échelle pour passer de l'image d'un milieu homogène à celle d'un milieu hétérogène. Le type d'approche à utiliser se décidera d'une part en fonction du rapport entre les dimensions de la structure à modéliser et une dimension caractéristique du milieu à représenter, d'autre part en fonction du but poursuivi (schématisation globale d'un système ou étude locale).

Ceci conduit à utiliser plutôt le terme de *structure composite* lorsqu'il est naturel de modéliser séparément chaque matériau dans la pièce à traiter, par exemple pour :

- le béton armé, ou encore le béton pré- ou post-contraint, pour lesquels béton et acier sont pris en compte chacun de leur côté, avec en première approximation un modèle où le béton apporte une résistance à la compression, et l'acier une résistance à la traction ;
- les plaques *sandwich* étudiées au chapitre précédent ; ici encore, la dimension de l'«élément de volume représentatif» est choisie plus petite que celle de la plaque, si bien que la variation des contraintes et des déformations à l'intérieur d'une telle plaque en flexion est modélisée ;
- les pneumatiques, qui sont calculés comme de véritables structures, assemblages de caoutchouc et de câbles métalliques en acier à très forte limite d'élasticité.

Cependant, dans un système mécanique complexe, la représentation individuelle précise de chaque élément n'est plus possible, si bien qu'il faut se résoudre à ne retenir qu'un comportement moyen. La modélisation effectuée comporte alors une opération d'*homogénéisation*, qui fournit par exemple des rigidités équivalentes dépendant des propriétés élémentaires de chaque matériau et de leur géométrie.

Le terme de *matériau composite* est donc réservé aux cas où la taille caractéristique de la microstructure est faible devant celle de la pièce, comme pour :

- les matériaux composites à matrice continue renforcée par des fibres ou des particules ; les matrices peuvent être minérales, résineuses ou métalliques, les fibres sont en verre, kevlar, carbone, bore, etc..., et leur diamètre typique est de l'ordre du centième de millimètre : matrices époxydes renforcés de fibre de verre ou de fibre de carbone, verre-polyester, aluminium-carbure de silicium, cobalt-carbure de tungstène, le béton (graviers dans du ciment), le macadam (graviers dans un

polymère, le bitume),

- les mousses et les matériaux cellulaires, composites particuliers composés d'un matériau et... de trous ; les cellules peuvent être ouverte (éponges) ou fermées (ceintures de sauvetage) ; de nombreux matériaux naturels sont cellulaires, le bois, le liège, le corail par exemple.

Pour cette dernière catégorie de matériau, le cheminement inverse peut être repris, et, dans le but de caractériser précisément les propriétés mécaniques, il est possible de considérer ce qui était précédemment un élément de volume représentatif sur lequel était défini un comportement homogénéisé comme une structure, de dimensions millimétriques ou centimétriques, pour avoir accès aux champs de contraintes et de déformation de l'échelon inférieur. L'étude porte alors sur une *cellule élémentaire*, comportant une fibre et la matrice environnante.

Cette partie s'intéresse dans un premier temps aux matériaux eux-mêmes, et aux modèles élémentaires que leurs propriétés suscitent. On trouvera des compléments à cette approche dans [2]. Pour une approche plus axée sur les aspects mécanique, on consultera [1], ou un ouvrage classique [4]. La fin du chapitre donne un bref aperçu de la théorie des stratifiés pour les plaques chargées dans leur plan, et de la théorie des plaques de Love–Kirchhoff, pour les plaques en traction et flexion.

8.1 Les composants élémentaires des matériaux composites

8.1.1 Renforts

Les composites artificiels sont souvent renforcés soit par des fibres, soit par des composants fabriqués à base de fibres (torons, assemblage de fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix. Le tableau 8.1 résume les principales caractéristiques mécaniques.

1. Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1 euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés (E,R,S) selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).
2. Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple polyacrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200°C), puis pyrolyse (1500-2500°C). Selon la température et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).
3. Les fibres de polymère les plus connues sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles servent essentiellement à fabriquer des câbles.
4. Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre. Le diamètre résultant est de 100 à 200µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.
5. Les microbilles pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150µm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%.

Matériau	Module d'Young (GPa)	Résistance en traction (MPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Température d'utilisation max (°C)	Allongement à rupture (%)
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar 49	130	3600	1450	200	2
Carbone HM	400	2000	1900	2500	
Bore	400	3500	2650	700	0,8
SiC (fibre)	480	2300	3200	900	0,5
SiC (trichite)	840	21000	3200	1600	2,5

TAB. 8.1 – Propriétés de quelques éléments de renfort

Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

6. Les principaux renforts minéraux sont le mica et l'amiante. L'un et l'autre sont des composés naturels dont les propriétés ne permettent pas d'atteindre les résistances obtenues avec les fibres. Le mica se présente sous forme de paillettes, dont l'intérêt est d'offrir un renforcement bidirectionnel. L'amiante (mélange d'oxydes de magnésium, de silice et d'eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet.

8.1.2 Matrices

La matrice incorpore les fibres ou les éléments de renfort, auxquels elle doit adhérer suffisamment bien pour que le transfert de charge soit optimal.

1. Les matrices organiques sont faites de matière plastiques. Il convient de distinguer les matrices thermoplastiques, à chaîne linéaire, très répandues, et les polymères thermodurcissables, ou résines, aux propriétés mécaniques plus élevées. Dans cette dernière catégorie se rangent les résines de polyester, les résines époxydes, qui peuvent être utilisées jusque vers 200°C, les résines phénoliques ou les résines polyimides, qui supportent des températures de 400°C.
2. Les matrices carbonées sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. La matière peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le second procédé est plus rapide que le premier, qui peut durer plusieurs mois pour obtention d'une densification suffisante, mais moins reproductible. Le carbone se dépose en grains sur les fibres, assurant leur bonne liaison. Il est possible par exemple d'obtenir un composite carbone-carbone dont la densité est égale à celle du carbone massif.
3. Les matrices métalliques présentent plusieurs avantages, comme une bonne ductilité, une bonne résistance à certains solvants, une meilleure tenue en température que les résines, une meilleure usinabilité. A l'inverse, elles sont plus difficiles à mettre en oeuvre, de densité plus élevée, et des problèmes peuvent apparaître aux interfaces fibres-matrice du fait de la réactivité des matériaux. Comme pour le cas des matrices carbonées, la fabrication du composite peut s'effectuer par imprégnation en phase liquide, décomposition chimique en phase vapeur, mais encore par co-extrusion ou co-laminage.
4. Les matrices céramiques sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masqué par l'insertion de fibres dans la matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide (SiC-SiC par exemple) ou le dépôt plasma (par exemple dépôt de silicium puis nitruration à l'aide

d'un traitement sous azote à 1450°C, qui produit une augmentation de volume et favorise la densification).

8.2 Rappel : milieux élastiques anisotropes

8.2.1 Notation de Voigt pour les relations de comportement

L'expression des relations de l'élasticité, $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ porte sur des tenseurs du second et du quatrième ordre symétriques. Ils peuvent être respectivement représentés par des vecteurs de dimension 6 (pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$), et par une matrice carrée de dimension 6 (pour $\underline{\underline{C}}$). Les relations de symétrie $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$, et $C_{ijkl} = C_{klij}$ s'expriment alors par le fait que la matrice (6 x 6) est symétrique. La notation de Voigt, à deux indices I et J variant de 1 à 6, met respectivement en correspondance les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 de I et J avec les doublets (1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,1), (1,2). Dans le cas le plus général, il y a 21 coefficients élastiques. En notant par γ le "cisaillement de l'ingénieur", tel que $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, pour i différent de j , en désignant par C_{IJ} les composantes de la matrice représentant le tenseur $\underline{\underline{C}}$, par S_{IJ} celles de son inverse, et en posant (i) $C_{IJ} = C_{ijkl}$; (ii) $S_{IJ} = S_{ijkl}$, dans le cas où I et J sont inférieurs ou égaux à 3, (iii) $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$, si l'un des indices I ou J est inférieur ou égal à 3, l'autre supérieur, (iv) $S_{IJ} = 4S_{ijkl}$, si I et J sont supérieurs à 3, on obtient le vecteur contenant les 6 composantes de déformation en réalisant le produit de la matrice C par le vecteur contenant les 6 composantes de contrainte, et l'opération inverse étant réalisée à partir de la matrice S .

8.2.2 Respect des symétries matérielles

Si le matériau est invariant par la transformation définie par la matrice P , le changement de repère défini par P ne modifie pas la loi de comportement, qui doit toujours s'écrire à l'aide de la même représentation du tenseur $\underline{\underline{C}}$, soit : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, mais aussi $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, avec $\underline{\underline{\sigma}} = P^{-1} \underline{\underline{\sigma}} P$, et $\underline{\underline{\varepsilon}} = P^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}} P$. Il s'ensuit que $\underline{\underline{C}} = P^{-1} P^{-1} \underline{\underline{C}} P P$, soit sous forme indicielle : $C_{ijkl} = P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} C_{mnpq}$. L'application de cette dernière formule à des transformations particulières permet de constater dans chaque cas quel est le nombre de coefficients réellement indépendants.

1. Symétrie par rapport à un plan de coordonnées $x_3 = 0$: La matrice ne comporte que trois termes sur la diagonale, (1,1,-1). Les composantes C_{ijkl} qui ont un nombre impair d'indices 3 sont donc nulles, il n'y a plus que 13 coefficients indépendants :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{64} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{65} = 0 \quad (8.1)$$

2. Symétrie par rapport à deux plans orthogonaux $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$: Il faut annuler en plus les coefficients qui possèdent un nombre impair d'indices 1, il n'y a plus donc que 9 coefficients indépendants :

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \quad (8.2)$$

La matrice se met alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Il existe également une *formulation technique*, qui fait apparaître des modules d'élasticité et des coefficients de Poisson. Il faut prendre garde à cette formulation, qui introduit plus de 9 coefficients, ceux-ci étant bien entendu liés par les relations :

$$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2 \quad , \quad \nu_{23}/E_2 = \nu_{32}/E_3 \quad , \quad \nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1 \quad (8.4)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

3. Équivalence de deux axes de symétrie (par exemple 1 et 2) : Cette hypothèse introduit 3 relations supplémentaires, il n'y a plus que 6 coefficients indépendants, il s'agit d'une symétrie quadratique (cas des cristaux tétraonaux) :

$$C_{11} = C_{22} \quad C_{13} = C_{23} \quad C_{44} = C_{55} \quad (8.6)$$

4. Équivalence des trois axes de symétrie : Cela introduit encore trois relations, $C_{11} = C_{22} \quad C_{13} = C_{23} \quad C_{44} = C_{55}$, c'est le cas de la symétrie cubique, il ne reste que 3 coefficients indépendants :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

5. «Isotropie» transverse : Il doit y avoir invariance par une rotation quelconque autour d'un axe particulier, par exemple x_3 . Ceci implique que le matériau présente au moins la symétrie quadratique. D'autre part, si α est l'angle de cette rotation, la matrice P est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Son application au terme $C_{66} = C_{1212}$ conduit à $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$. Il y a 5 coefficients indépendants. C'est le cas du système hexagonal pour les cristaux, et des structures en nid d'abeille.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{33} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

La formulation de l'ingénieur pour ce type de symétrie est la suivante, avec $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$ et

$$\nu_{LZ}/E_L = \nu_{ZL}/E_Z :$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{ZL} \\ \gamma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_{LT}/E_L & -\nu_{LZ}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL}/E_T & 1/E_L & -\nu_{LZ}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{ZL}/E_Z & -\nu_{ZL}/E_Z & 1/E_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{LZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{LT})/E_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{TZ} \\ \sigma_{ZL} \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

6. Cas d'une plaque : Dans le cas d'une plaque, il suffit de ne conserver que les termes correspondants à σ_{LL} , σ_{TT} et σ_{LT} dans les expressions ci-dessus.
7. Isotropie : C'est la résultat d'une symétrie cubique et d'une isotropie transverse par rapport à l'un des axes du cube. Le terme C_{44} de la symétrie cubique se calcule donc exactement en fonction de C_{11} et de C_{12} : $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2$. Il ne subsiste donc que 2 coefficients indépendants. Il est immédiat d'identifier C_{11} à $(\lambda + 2\mu)$, et C_{12} à λ .

8.3 Composites unidirectionnels à fibres longues

8.3.1 Loi de mélange

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation *en parallèle* dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront *en série*, dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre, il vient alors :

$$E_L \text{ en sens long : } \quad E_L = c_m E_m + c_f E_f \quad (8.11)$$

$$E_T \text{ en sens travers : } \quad 1/E_T = c_m/E_m + c_f/E_f \quad (8.12)$$

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = c_m \varepsilon_{T_m} + c_f \varepsilon_{T_f} \quad (8.13)$$

Chacune des déformations latérales ε_{T_m} et ε_{T_f} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{T_m} = \nu_{LT_m} \varepsilon_L$, et $\varepsilon_{T_f} = \nu_{LT_f} \varepsilon_L$.

Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = c_m \nu_m + c_f \nu_f \quad (8.14)$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$1/\mu_{LT} = c_m/\mu_m + c_f/\mu_f \quad (8.15)$$

8.3.2 Constantes élastiques dans un repère quelconque

Les constantes E_L , E_T , ν_{LT} et μ_{LT} permettent de caractériser le comportement élastique dans le repère (sens long-sens travers). Le problème qui se pose est alors de connaître les propriétés dans un repère quelconque. Ce cas est traité en exercice.

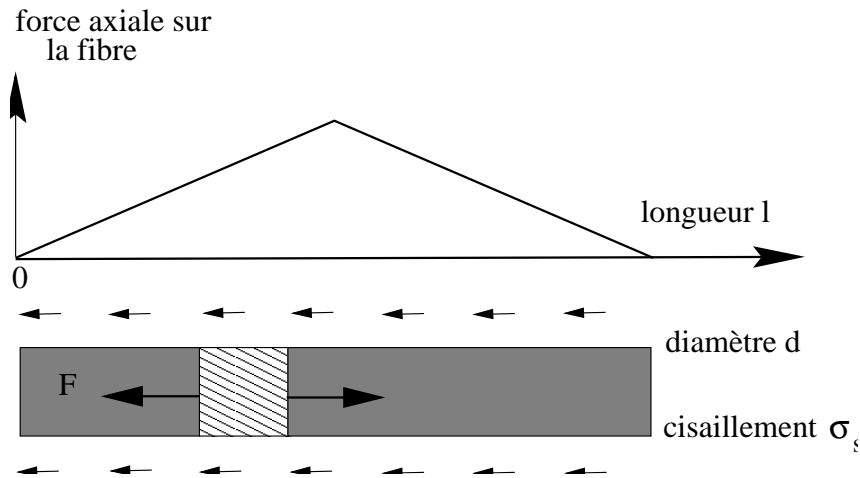


FIG. 8.1 – Reprise de charge le long d'une fibre

8.3.3 «Fonctionnement» du composite

Un grand nombre de composites unidirectionnels sont constitués par des fibres fragiles dans une matrice plus ductile. La contrainte maximale qui peut être atteinte en traction sur ce matériau est donc obtenue juste avant la rupture des fibres, lorsque la contrainte dans celles-ci est de l'ordre de leur contrainte de rupture, σ_{R_f} , et que la matrice est également soumise à une contrainte qui provoque des déformations permanentes, σ_Y :

$$\sigma_{MAX} = (1 - c_f)\sigma_Y + c_f\sigma_{R_f} \quad (8.16)$$

Le fait d'avoir rajouté des fibres est donc bénéfique si cette contrainte est supérieure à la contrainte de la matrice seule, supposée non renforcée par les fibres, une fois que toutes celles-ci sont rompues, qui s'exprime en fonction de la contrainte à rupture de la matrice σ_{R_m} :

$$\sigma_R = (1 - c_f)\sigma_{R_m} \quad (8.17)$$

Le fait que σ_{MAX} soit plus grand que σ_R produit une condition sur c_f ,

$$c_f > (\sigma_{R_m} - \sigma_Y) / (\sigma_{R_f} + \sigma_{R_m} - \sigma_Y) \quad (8.18)$$

ce qui montre qu'il existe une *fraction critique de renfort* en dessous de laquelle l'ajout de fibres détériore le comportement au lieu de l'améliorer.

Le même type de raisonnement simple suggère l'existence d'une *longueur optimale de fibre*. Il consiste à considérer que, si elle joue son rôle de façon optimum, il se transfère à la fibre une force $\sigma_s \pi d dx$ sur une longueur élémentaire dx le long de son axe (σ_s est la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice, d le diamètre de la fibre (voir figure 8.1)). La force sur une section de la fibre passe donc de 0 à l'extrémité à une valeur de $\sigma_s \pi x d$ à une distance x de celle-ci.

La longueur optimale est obtenue lorsque la force au milieu de la fibre correspond à la contrainte de rupture de la fibre, ce qui correspond à une longueur l telle que : $\sigma_s \pi d l / 2 = (\pi d^2 / 4) \sigma_{R_f}$, soit :

$$l = d \sigma_{R_f} / 2 \sigma_s \quad (8.19)$$

Au delà, la fibre se rompt. Ceci explique également pourquoi les résultats obtenus avec des fibres courtes sont en général du même niveau que ceux produits par des fibres longues.

Matériau	E_L (GPa)	E_T (GPa)	$2\mu_{LT}$ (GPa)	σ_{RL} (MPa)	σ_{RT} (MPa)
Verre	45	12	4,5	1250	35
Kevlar 49	85	5,6	2,1	1410	28
Carbone HM	134	7	4,2	1270	42
Bore-époxy	210	12		1400	80
Bore-alu	220	140	7,5	1400	120

TAB. 8.2 – Propriétés de quelques plis de fibres-résine époxyde (avec 60% de fibre), bore-époxyde et bore-aluminium ; E_L = module d'Young sens long, E_T = module d'Young sens travers, μ_{LT} = module de cisaillement, σ_{RL} = contrainte à rupture sens long, σ_{RT} = contrainte à rupture sens travers.

8.3.4 Quelques ordres de grandeur

Le tableau 8.2 fournit des valeurs des modules et des contraintes de rupture en directions longitudinale et transverse pour plusieurs sortes de plis. La très forte anisotropie rend le pli très vulnérable seul, et explique qu'il faille avoir recours au tissage ou à la superposition de plis pour disposer de matériaux utilisables par l'ingénieur.

8.4 Plaques stratifiées

8.4.1 Tissus et mats

Le pli tissé est obtenu en disposant des fibres suivant deux directions perpendiculaires. Si les fils de trame couvrent un file de chaîne avant de passer sous le suivant, il s'agit de toile ou taffetas, si plusieurs files de chaîne sont couverts, il s'agit de satin. Une première approximation consiste à traiter le tissu comme deux couches d'unidirectionnel superposées, ayant les mêmes déplacements. Un tissu est équilibré s'il y a le même nombre de fils dans chaque direction, et qu'ils sont de même nature.

Les mats sont des renforts bidirectionnels à fibres coupées (5 à 10 cm). Ils sont isotropes dans leur plan. Il existe également des tissages tridimensionnels (3D), dans lesquels plusieurs couches de tissus bidimensionnels (2D) sont assemblées par des fibres selon la direction du troisième axe. Les tissages "4D" comportent quant à eux des fibres dirigées selon les directions de type (1,1,1) d'un cube. Un exemple typique est le carbone-carbone, qui résiste jusqu'à de très hautes températures, et qui, en raison de la géométrie adoptée, est insensible au délaminage, ou décollement des couches entre elles.

8.4.2 Définition

Un stratifié résulte de la superposition de plusieurs couches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus. Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement 0° , 45° , 90° , -45°). Il est important de respecter dans la conception la symétrie miroir, qui caractérise une plaque dont les empilements de plis de part et d'autre du plan moyen sont symétriques. Si la plaque ne possède pas cette symétrie, elle risque de se "voiler" lors de la fabrication en raison des dilatations différentielles liées aux différences de coefficient de dilatation. Les minimums technologiques sont de 3 à 4 couches de tissu équilibré ou 8 couches d'unidirectionnel, et une épaisseur de 1 mm.

Les stratifiés risquent de rompre en traction, en compression, sous l'effet de flambements locaux, ou à cause de délaminage. Les calculs s'effectuent avec de petits programmes sur micro-ordinateur. Il faut déterminer la bonne tenue de chaque couche. La connaissance des efforts globaux (efforts normaux N_{11} et N_{22} , efforts tangentiels T_{12} dans le plan du stratifié), et des modules d'élasticité homogénéisés permet de trouver les déformations moyennes. En supposant alors que ces déformations (en l'absence de délaminage) sont valides pour toutes les couches, il ne reste plus qu'à appliquer le tenseur d'élasticité de

la couche i pour y effectuer une évaluation de la contrainte. La couche sera réputée rompue si elle atteint le critère de Hill-Tsaï :

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{R_L}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{R_T}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L \sigma_T}{\sigma_{R_L}}\right) + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{R_{LT}}}\right)^2 = 1 \quad (8.20)$$

8.4.3 Théorie des stratifiés

Un stratifié est un matériau formé par la superposition de plusieurs couches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus. Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement 0° , 45° , 90° , -45°). Il y a au minimum quelques couches, et jusqu'à 20 ou 30 couches.

Cinématique et équilibre

Pour les plaques *travaillant dans leur plan*, il est naturel de supposer que chaque couche a la même déformation, d'où un champ de déplacement virtuel, et un champ de déformation tels que :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U'(x_1, x_2) \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = V'(x_1, x_2) \quad (8.21)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} \quad \varepsilon_{22} = V'_{,2} \quad 2\varepsilon_{12} = U'_{,2} + V'_{,1} \quad (8.22)$$

$$\delta W_{int} = - \int_V (\sigma_{11} U'_{,1} + \sigma_{22} V'_{,2} + \sigma_{12} (U'_{,2} + V'_{,1})) dV \quad (8.23)$$

$$= - \int_S (U'_{,1} N_{11} + V'_{,2} N_{22} + (U'_{,2} + V'_{,1}) N_{12}) dS \quad (8.24)$$

En définissant les quantités suivantes par intégration sur l'épaisseur de la plaque, représentant respectivement les efforts intérieurs globaux en direction x_1 , en direction x_2 , et de cisaillement (il s'agit d'une force par unité d'épaisseur, exprimée en Pa.m, ou N/m) :

$$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3 \quad N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3 \quad N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3 \quad (8.25)$$

Comme on ne considère pas de déplacement hors du plan, on ne peut pas introduire dans cette théorie d'efforts extérieurs normaux au plan de la plaque. On se limite à la partie «membrane» de la théorie de plaque plus générale qui sera envisagée par la suite. Les *efforts extérieurs* sont définis sur le contour Γ , par une force résultante par unité de longueur (en N/m) à deux composantes, T_1 et T_2 , et, en un point courant de la surface S , par une force répartie (en Pascal), de composantes t_1 et t_2 . Leur travail virtuel s'exprime donc :

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} (T_1 U' + T_2 V'_2) ds + \int_S (t_1 U' + t_2 V'_2) dS \quad (8.26)$$

La procédure de traitement des efforts intérieurs est similaire à celle qui a été utilisée pour les poutres. Il comporte successivement une intégration par partie, et l'utilisation du théorème de la divergence pour transformer la divergence sur la surface de la plaque en un flux sur son contour. Les termes sont du type :

$$N_{11} U'_{,1} = (N_{11} U')_{,1} - N_{11,1} U' \quad (8.27)$$

On retrouve ainsi le fait que les efforts internes équilibrent les efforts externes sur la frontière de la plaque. Les équations d'équilibre sont obtenues en un point courant de la surface :

$$N_{1,1} + N_{12,2} + t_1 = 0 \quad (8.28)$$

$$N_{12,1} + N_{2,2} + t_2 = 0 \quad (8.29)$$

Loi de comportement

Pour établir la loi de comportement, il faut estimer N_{11} , N_{22} , et N_{12} . Pour cela, il faut ramener le comportement de chaque couche depuis son repère «naturel» d'orthotropie au repère général de la plaque.

Le repère $(n-t)$ des fibres fait un angle α avec le repère de la plaque : $\alpha = \text{angle}(x_1, n)$, $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$. Le changement de repère s'exprime donc, par exemple pour les contraintes :

$$(\sigma_{nt}) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} (\sigma_{ij}) \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

En passant en notation de Voigt, il vient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

Il faut utiliser une autre matrice de passage pour les déformations, en raison du facteur 2 qui est présent dans les termes de cisaillement.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ 2\varepsilon_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

On note qu'une formulation alternative permet d'utiliser la même matrice pour contraintes et déformations, en considérant plutôt un facteur $\sqrt{2}$ sur les termes en cisaillement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs\sqrt{2} \\ s^2 & c^2 & -cs\sqrt{2} \\ -cs\sqrt{2} & cs\sqrt{2} & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs\sqrt{2} \\ s^2 & c^2 & -cs\sqrt{2} \\ -cs\sqrt{2} & cs\sqrt{2} & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Il s'agit alors d'établir une relation de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

sachant que :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_n & -\nu_{nt}/E_n & 0 \\ -\nu_{nt}/E_n & 1/E_t & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

On est donc amené à utiliser l'expression du tenseur d'élasticité dans le repère de chargement, qui s'exprime par exemple pour la couche i :

$$Q_{11}^i = c^4 \bar{E}_n^i + s^4 \bar{E}_t^i + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i) \quad (8.37)$$

$$Q_{22}^i = s^4 \bar{E}_n^i + c^4 \bar{E}_t^i + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i) \quad (8.38)$$

$$Q_{66}^i = c^2 s^2 (\bar{E}_n^i + \bar{E}_t^i - 2\nu_{tn} \bar{E}_n^i + (c^2 - s^2)^2 \mu_{nt}^i) \quad (8.39)$$

$$Q_{12}^i = c^2 s^2 (\bar{E}_n^i + \bar{E}_t^i - 4\mu_{nt}^i \bar{E}_n^i + (c^4 + s^4) \nu_{tn} \bar{E}_n^i) \quad (8.40)$$

$$Q_{16}^i = cs (c^2 \bar{E}_n^i - s^2 \bar{E}_t^i - (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i)) \quad (8.41)$$

$$Q_{26}^i = cs (s^2 \bar{E}_n^i - c^2 \bar{E}_t^i - (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i)) \quad (8.42)$$

$$(8.43)$$

avec $\bar{E}_n^i = E_n^i / (1 - \nu_m \nu_{tm})$ $\bar{E}_t^i = E_t^i / (1 - \nu_m \nu_{tm})$.

Pour obtenir la rigidité d'ensemble, on doit intégrer sur l'épaisseur chacun des termes obtenus. La forme obtenue est :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_h Q_{11} dx_3 & \int_h Q_{12} dx_3 & \int_h Q_{16} dx_3 \\ \int_h Q_{12} dx_3 & \int_h Q_{22} dx_3 & \int_h Q_{26} dx_3 \\ \int_h Q_{16} dx_3 & \int_h Q_{26} dx_3 & \int_h Q_{66} dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U, 1 \\ V, 2 \\ V, 1 + U, 2 \end{pmatrix} \quad (8.44)$$

Cette expression générale appelle quelques remarques :

- En fait, l'intégration continue est remplacée par une somme discrète sur le nombre de couches, ainsi, en notant e_i l'épaisseur de la couche i :

$$A_{11} = \sum_i Q_{11}^i e_i \quad (8.45)$$

- Les couches interviennent par leur épaisseur, mais pas par l'ordre de leur empilement. Ce ne sera plus le cas dans le paragraphe suivant.
- Les termes Q_{16} et Q_{26} caractérisent le couplage traction-cisaillement. Ils indiquent qu'une plaque formée de couches présentant des orientations quelconques se déforme en cisaillement sous l'effet d'une traction simple, et vice-versa. Comme ces termes sont impairs en α , le couplage disparaît dans le cas d'une plaque symétrique.

8.5 Plaque de Kirchhoff-Love

On considère maintenant le même type de plaque, mais il s'agit de construire une théorie qui supporte à la fois des déplacements de type membrane et de type flexion, donc prenant en compte des forces, mais aussi des moments. On utilise de façon systématique la procédure déjà suivie pour les poutres et les plaques.

Cinématique et équilibre

La plaque est définie dans le plan (x_1-x_2) , sa normale correspond à l'axe x_3 , son épaisseur est h (fig.8.2). Le déplacement est défini par 3 translations, U, V, W , et deux angles, θ_1 et θ_2 , *qui sont fonctions de x_1-x_2 uniquement.*

On définit donc la cinématique en fonction des cinq inconnues précédentes :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U + \theta_2 x_3 \quad (8.46)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = V - \theta_1 x_3 \quad (8.47)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = W \quad (8.48)$$

Ceci permet d'évaluer un tenseur de déformations :

$$\varepsilon_{11} = U,1 + \theta_{2,1} x_3 \quad (8.49)$$

$$\varepsilon_{22} = V,2 - \theta_{1,2} x_3 \quad (8.50)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (8.51)$$

$$2\varepsilon_{12} = U,2 + \theta_{2,2} x_3 + V,1 - \theta_{1,1} x_3 \quad (8.52)$$

$$2\varepsilon_{23} = -\theta_1 + W,2 \quad (8.53)$$

$$2\varepsilon_{31} = \theta_2 + W,1 \quad (8.54)$$

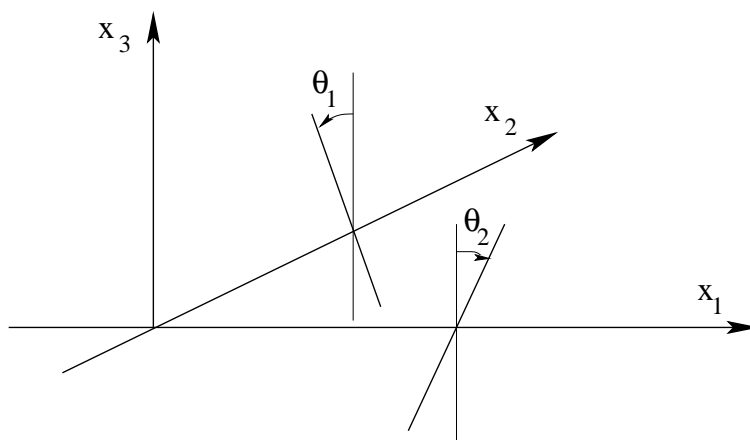


FIG. 8.2 – Géométrie d'une plaque et variables décrivant sa cinématique

Le travail virtuels des efforts intérieurs est tel que :

$$-\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (8.55)$$

$$= U_{,1} \int_h \sigma_{11} dx_3 + \theta_{2,1} \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3 + V_{,2} \int_h \sigma_{22} dx_3 - \theta_{1,2} \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3 \quad (8.56)$$

$$+ (U_{,2} + V_{,1}) \int_h \sigma_{12} dx_3 + (\theta_{2,2} - \theta_{1,1}) \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3 \quad (8.57)$$

$$+ (-\theta_1 + W_{,2}) \int_h \sigma_{23} dx_3 + (\theta_2 + W_{,1}) \int_h \sigma_{31} dx_3 \quad (8.58)$$

On en déduit donc les variables globales suivantes :

Variable associée	définition :	(8.59)
-------------------	--------------	--------

$U_{,1}$	$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$	(8.60)
----------	------------------------------------	--------

$\theta_{2,1}$	$M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$	(8.61)
----------------	--	--------

$V_{,2}$	$N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$	(8.62)
----------	------------------------------------	--------

$\theta_{1,2}$	$-M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$	(8.63)
----------------	---	--------

$U_{,2} + V_{,1}$	$N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$	(8.64)
-------------------	------------------------------------	--------

$\theta_{2,2} - \theta_{1,1}$	$M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$	(8.65)
-------------------------------	--	--------

$-\theta_1 + W_{,2}$	$T_1 = \int_h \sigma_{23} dx_3$	(8.66)
----------------------	---------------------------------	--------

$\theta_2 + W_{,1}$	$T_2 = \int_h \sigma_{31} dx_3$	(8.67)
---------------------	---------------------------------	--------

En théorie des poutres, il existe une approche (Timoshenko) pour laquelle l'angle que fait une section droite avec la ligne neutre est déterminé de façon indépendante, et une autre (Bernoulli) dans laquelle les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne au cours de la déformation. Le dernier cas s'applique essentiellement lorsque la poutre est peu épaisse, si bien que les cisaillements restent faibles. Ceci supprime l'angle de la liste des variables indépendantes, puisqu'il peut être alors directement

déterminé si la flèche est connue. Nous allons reprendre cette simplification pour la théorie de plaque construite ici. On suppose donc qu'un segment initialement perpendiculaire au plan moyen le reste au cours de la déformation. Les cisaillements 13 et 23 sont nuls, ce qui produit les conditions cinématiques :

$$-\theta_1 + W_{,2} = 0 \quad \theta_2 + W_{,1} = 0 \quad (8.68)$$

On aura également :

$$T_1 = 0 \quad T_2 = 0 \quad (8.69)$$

Dans le cadre de cette théorie simplifiée, la liste des variables associée est :

$$\theta_{2,1} = -W_{,11} \text{ associé à } M_{11} \quad (8.70)$$

$$\theta_{1,2} = W_{,22} \text{ associé à } M_{22} \quad (8.71)$$

$$\theta_{2,2} - \theta_{1,1} = -2W_{,12} \text{ associé à } M_{12} \quad (8.72)$$

ce qui mène au tableau :

Variable associée	définition :	(8.73)
$U_{,1}$	$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$	(8.74)
$-W_{,11}$	$M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$	(8.75)
$V_{,2}$	$N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$	(8.76)
$W_{,22}$	$-M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$	(8.77)
$U_{,2} + V_{,1}$	$N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$	(8.78)
$-2W_{,12}$	$M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$	(8.79)

- N_{11} et N_{22} sont les efforts normaux, N_{12} le cisaillement dans le plan de la plaque
- M_{11} et M_{22} sont des moments de flexion, et M_{12} un moment de torsion

L'écriture du travail des efforts extérieurs et l'écriture du principe des travaux virtuels permet ici encore d'écrire les conditions aux limites en force et moment, et de définir les équations d'équilibre. On ne détaille pas ici les différents développements. On retrouve bien entendu les équations de type membrane de la théorie des stratifiés, auxquelles s'ajoute une équation concernant les moments, qui fait intervenir l'effort réparti p porté par l'axe x_3 :

$$N_{1,1} + N_{12,2} + t_1 = 0 \quad (8.80)$$

$$N_{12,1} + N_{2,2} + t_2 = 0 \quad (8.81)$$

$$M_{11,11} + M_{22,22} + 2M_{12,12} + p = 0 \quad (8.82)$$

Plusieurs stratégies sont possibles pour établir ensuite une loi de comportement. L'une des plus performantes consiste à reconstruire un champ approché à partir d'une formulation élastique tridimensionnelle, comme par exemple dans [3]. On se contentera ici d'une évaluation plus simple, qui ne cherche pas à donner accès aux termes de cisaillement, et qui est raisonnable pour fournir la rigidité d'une plaque composite dont toutes les couches sont identiques, si ce n'est l'orientation des fibres. On obtient une évaluation des efforts globaux en intégrant sur l'épaisseur une contrainte que l'on estime à partir de la cinématique du problème. On introduit successivement :

- des termes de type «membrane» :

$$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3 \quad (8.83)$$

$$= \int_h (Q_{11}\varepsilon_{11} + Q_{12}\varepsilon_{22} + Q_{16}\varepsilon_{12}) dx_3 \quad (8.84)$$

$$= \int_h (Q_{11}(U_{,1} + \theta_{2,1}x_3) + Q_{12}(V_{,2} - \theta_{1,2}x_3)) \quad (8.85)$$

$$+ Q_{16}(U_{,2} + \theta_{2,2}x_3 + V_{,1} - \theta_{1,1}x_3) dx_3 \quad (8.86)$$

$$(8.87)$$

$$N_{11} = \int_h (Q_{11}U_{,1} - Q_{11}x_3W_{,11}) dx_3 \quad (8.88)$$

$$+ \int_h (Q_{12}V_{,2} - Q_{12}x_3W_{,22}) dx_3 \quad (8.89)$$

$$+ \int_h (Q_{16}(U_{,2} + V_{,1}) - 2Q_{16}x_3W_{,12}) dx_3 \quad (8.90)$$

- termes de type «flexion» :

$$M_{11} = \int_h \sigma_{11}x_3 dx_3 \quad (8.91)$$

$$= \int_h (Q_{11}\varepsilon_{11} + Q_{12}\varepsilon_{22} + Q_{16}\varepsilon_{12})x_3 dx_3 \quad (8.92)$$

$$= \int_h (Q_{11}(U_{,1}x_3 + \theta_{2,1}x_3^2) + Q_{12}(V_{,2}x_3 - \theta_{1,2}x_3^2)) \quad (8.93)$$

$$+ Q_{16}(U_{,2}x_3 + \theta_{2,2}x_3^2 + V_{,1}x_3 - \theta_{1,1}x_3^2) dx_3 \quad (8.94)$$

$$M_{11} = \int_h (Q_{11}x_3U_{,1} - Q_{11}x_3^2W_{,11}) dx_3 \quad (8.95)$$

$$+ \int_h (Q_{12}x_3V_{,2} - Q_{12}x_3^2W_{,22}) dx_3 \quad (8.96)$$

$$+ \int_h (Q_{16}x_3(U_{,2} + V_{,1}) - 2Q_{16}x_3^2W_{,12}) dx_3 \quad (8.97)$$

On obtient ainsi une forme matricielle de la loi de comportement :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,1} \\ V_{,2} \\ V_{,1} + U_{,2} \\ -W_{,11} \\ -W_{,22} \\ -2W_{,12} \end{pmatrix} \quad (8.98)$$

La sous-matrice $[A]$ est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

La sous-matrice $[B]$ est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11}x_3 & Q_{12}x_3 & Q_{16}x_3 \\ Q_{12}x_3 & Q_{22}x_3 & Q_{26}x_3 \\ Q_{16}x_3 & Q_{26}x_3 & Q_{66}x_3 \end{pmatrix} \quad (8.100)$$

La sous-matrice $[C]$ est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11}x_3^2 & Q_{12}x_3^2 & Q_{16}x_3^2 \\ Q_{12}x_3^2 & Q_{22}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 \\ Q_{16}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 & Q_{66}x_3^2 \end{pmatrix} \quad (8.101)$$

L'expression précédente appelle quelques remarques :

- La matrice de la formule 8.5 renferme des termes de différentes dimensions. On a :

$$\begin{pmatrix} N/m \\ - \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N/m & | & N \\ - & - & - \\ N & | & N.m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \\ m^{-1} \end{pmatrix} \quad (8.102)$$

- Chacun de ses termes est le résultat de la contribution de chaque couche, et est donc calculé comme une somme discrète sur toutes les couches. En appelant respectivement h_i^- et h_i^+ les cotes inférieures et supérieures de la couche i , e_i son épaisseur :

$$A_{11} = \sum_i Q_{11}^i e_i \quad (8.103)$$

$$B_{11} = \sum_i Q_{11}^i (h_i^{+2} - h_i^{-2})/2 \quad (8.104)$$

$$C_{11} = \sum_i Q_{11}^i (h_i^{+3} - h_i^{-3})/3 \quad (8.105)$$

- Les termes linéaires en x_3 produisent du *couplage* membrane-flexion. Ils sont nuls pour les plaques symétriques.
- Pour tous les termes contenant soit x_3 , soit x_3^2 , le résultat obtenu *dépend de la séquence d'empilement*, ce qui est assez intuitif en effet lorsqu'il s'agit de calculer une résistance à la flexion : celle-ci sera meilleure si les couches les plus résistantes vis-à-vis d'une flexion donnée sont éloignées de la surface moyenne. On retrouve le cas illustré précédemment par la poutre composite.
- On reconstruit un champ de contraintes approché dans chaque couche en considérant les efforts normaux et les moments dans chaque couche (les indices α et β varient de 1 à 2, \bar{h}_i est la cote moyenne de la couche) :

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (8.106)$$

$$M_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} (x_3 - \bar{h}_i) dx_3 \quad (8.107)$$

Il vient alors :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}^i}{e_i} + \frac{12}{e_i^2} M_{\alpha\beta}^i \frac{x_3 - \bar{h}_i}{e_i}$$

Bibliographie

- [1] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites – Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, 1993.
- [2] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermès, 1991.
- [3] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *J.Math.Phys.*, 29 :90–95, 1950.
- [4] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Kreiger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw–Hill, 1964.