FLEXION D'UNE POUTRE DE SECTION RECTANGULAIRE

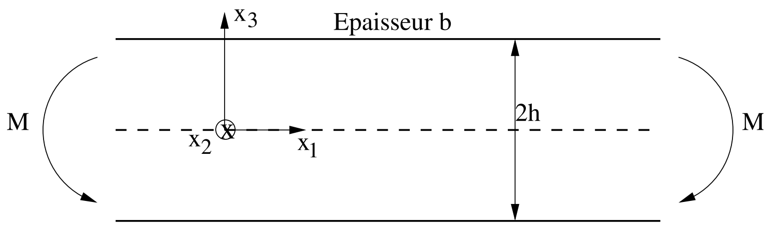


Figure 1 : Géométrie et chargement de la poutre

La poutre de la figure 1 possède une section rectangulaire, de hauteur $2h$ et de largeur b. Elle est chargée en flexion pure (cisaillements négligés), et on suppose qu'une section droite de normale x_1 reste droite.
Le comportement du matériau qui la constitue est élastique (E, ν) parfaitement plastique (σ_y).

1. *Quelle est la distribution de contrainte et de déformation en élasticité ?*
   En flexion pure, l'état de contrainte est uniaxial ; le déplacement u_1, donc ε_{11} et σ_{11} sont proportionnels à x_3 (origine des axes sur la ligne neutre).

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; \varepsilon^e = \begin{pmatrix} \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma/E \end{pmatrix} \qquad (1)$$

   L'écriture de l'équilibre des moments (Figure 2a)
   $M = \int_{-h}^{+h} x_3 \sigma_{11} b \, dx_3$ donne, en supposant que $\sigma_{11} = kx_3$:

$$\sigma_{11} = \sigma = Mx_3/I, \text{ avec } I = 2bh^3/3$$
$$\sigma_{max} = \sigma_m = 3M/2bh^2 \;, \; \sigma(x_3) = (x_3\,/h)\sigma_m$$

2. *Trouver le moment M_e pour lequel la plasticité débute.*
   Il y a plastification lorsque $\sigma_m = \sigma_y$, soit : $M_e = 2bh^2\sigma_y/3$

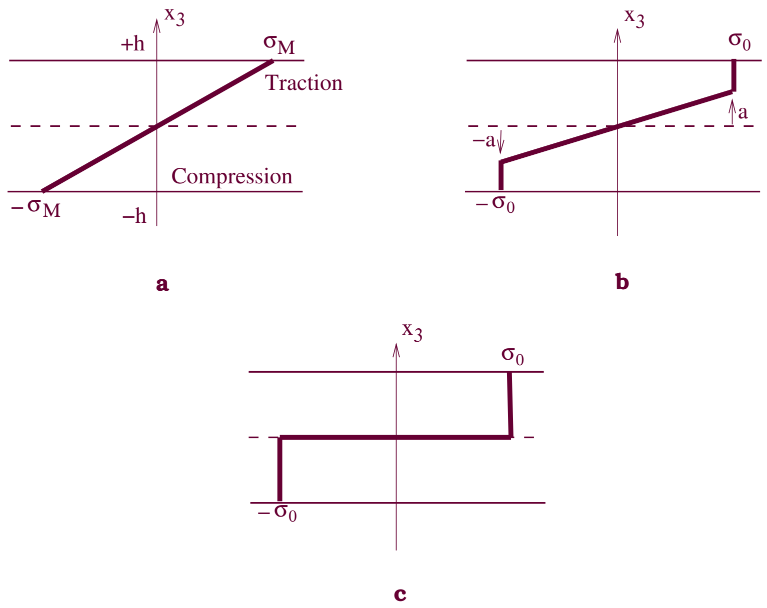


Figure 2 : Profil de contrainte σ_{11} dans une poutre en flexion simple :
(a) Elasticité, (b) En cours de plastification, (c) Charge limite

3. *Trouver la distribution des contraintes lorsque M dépasse M_e. Montrer qu'il existe une valeur limite M_∞ du moment de flexion pour laquelle les déformations deviennent infinies.*
   Pour $M > M_e$, il y a un noyau élastique $-a \leq x_3 \leq a$, et deux zones plastiques, l'une en traction ($x_3 > a$), l'autre en compression ($x_3 < -a$). Dans le noyau élastique, on a toujours linéarité de la contrainte avec x_3 : $\sigma = kx_3$; dans les zones plastiques, on

a $\sigma = +\sigma_y (x_3 > a)$, ou $\sigma = -\sigma_y (x_3 < -a)$ (Fig.2b). Les deux inconnues du problème sont k et a.
Elles doivent vérifier :
– la condition d'équilibre (1) : $\int_{-h}^{+h} x_3 \, \sigma b \, dx_3 = M$
– la continuité de la déformation en $\pm a$, entraînant celle de la contrainte à la frontière entre les zones élastique et plastique :
$ka = \sigma_y$ d'où : $k = \sigma_y / a$.
En remplaçant σ par son expression dans l'égalité (1), on obtient la valeur de M :

$$M/2 = \int_0^a x_3(\sigma_y \, x_3/a) b \, dx_3 + \int_a^h x_3 \, b\sigma_y \, dx_3$$

$$M = b\sigma_y (h^2 - a^2/3)$$

Remarques :

– Si $a = h$: M vaut bien $M_e = (2/3) b\sigma_y h^2$
– Si $a = 0$: $M = M_\infty = b\sigma_y h^2 = 3M_e/2$
Dans les deux cas, les solutions élastique et plastique se raccordent correctement.
Pour $M = M_\infty$, la totalité de la poutre est plastifiée, elle ne peut plus supporter de charge supplémentaire, on a une *rotule plastique* (Fig.2c).

4. *Que se passe-t-il lorsqu'on relâche l'effort ($M = 0$),*
i) dans le cas où le moment maximum atteint vaut $M_m \leq M_e$,
ii) dans le cas où $M_e < M_m < M_\infty$?
Montrer qu'il subsiste dans ce dernier cas des contraintes résiduelles.

Si on n'a pas dépassé le moment M_e, l'ensemble de la structure reste élastique, si bien que, après relâchement de l'effort, la structure reprendra sa forme initiale, et il n'y aura plus de contraintes. Au contraire, s'il y a eu plastification partielle, lorsqu'on fera passer le moment de M_m à zéro, les fibres qui sont allongées (resp. raccourcies) de façon irréversible vont se retrouver en compression (resp. traction). En supposant que l'ensemble de la décharge s'effectue de façon élastique (ce que l'on vérifiera par la suite), on obtient l'état final par superposition de l'état actuel et de la distribution de contrainte que l'on obtiendrait en élastique avec le moment $-M_m$, soit, quel que soit x_3 compris entre $-h$ et $+h$: $\sigma = -M_m x_3 / I$. Cela donne le profil suivant, reporté en figure 3a :
– pour $-a \leq x_3 \leq a$ $\quad \sigma = \sigma_y x_3/a - 3M_m x_3/2bh^3$
– pour $x_3 \geq a$ $\quad \sigma = \sigma_y - 3M_m x_3/2bh^3$
– pour $x_3 \leq -a$ $\quad \sigma = -\sigma_y - 3M_m x_3/2bh^3$

Remarques :

– On note que la pente $-3M_m/2bh^3$ est négative pour $|x_3| > a$.
– Les contraintes résiduelles sont *autoéquilibrées* : $\int_{-h}^{+h} \sigma \, dx_3 = 0$.
– On ne replastifie pas en compression, car, lorsque le moment maximum M_m tend vers le moment limite $M_\infty = b\sigma_y h^2$, la contrainte σ_c obtenue par superposition en $x_3 = h$ reste supérieure à $-\sigma_y$:

$$\sigma_c = \sigma_y - (3b\sigma_y h^2/2bh^3)h = -\sigma_y/2$$

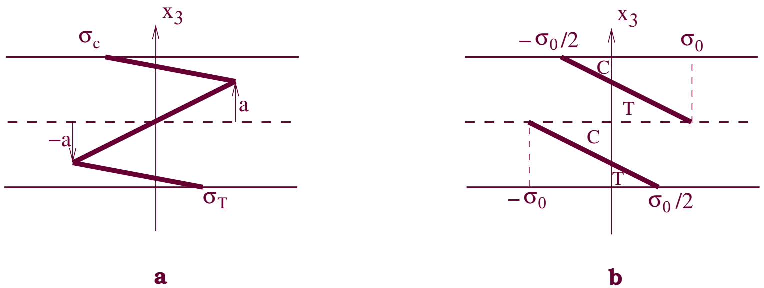


Figure 3 : Profil de contrainte σ_{11} après décharge : (a) Pour une mise en charge élastoplastique, (b) Pour une mise en charge à la charge limite

5. *Recommencer le problème avec une force horizontale P superposée au moment de flexion : définir dans le plan P–M la "limite d'élasticité", pour laquelle il y a plasticité commençante, et la "charge limite" correspondant à la ruine de la structure par déformation excessive.*

   Si on applique une traction horizontale en plus d'un moment, la forme du tenseur de contrainte est inchangée, mais la ligne neutre est déplacée. On a simplement, en élasticité :

$$\sigma_{11} = \sigma = Mx_3/I + P/2bh$$

   On définit donc la limite du domaine d'élasticité par un segment de droite dans chaque quadrant du plan P–M.

   On connaît déjà le moment limite en flexion simple. En l'absence de moment, la charge limite en traction est égale à la charge qui produit la première plasticité :

$$P_\infty = P_e = 2hb\sigma_y$$

   Pour trouver les valeurs de P_r et M_r qui conduisent à la ruine, en cas de chargement combiné, il suffit de se placer directement à l'état limite (Fig.4a), et d'y écrire l'équilibre des moments et de la force horizontale. Cet état est caractérisé par :

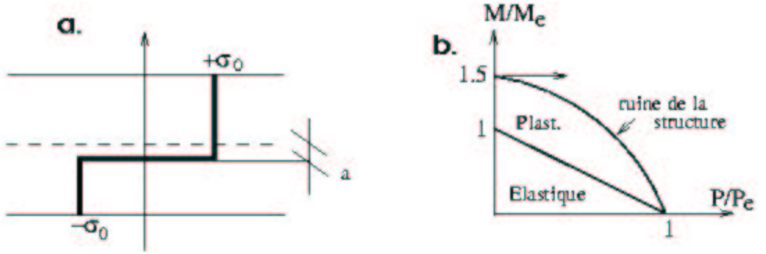
$$\text{si } x_3 < a \;:\; \sigma = -\sigma_y$$
$$\text{si } x_3 > a \;:\; \sigma = \sigma_y.$$

   On écrit alors :

$$P = \int_{-h}^{a} -\sigma_y b\, dx_3 + \int_a^h \sigma_y b\, dx_3 = -2\sigma_y ab$$
$$M = \int_{-h}^{a} -\sigma_y x_3 b\, dx_3 + \int_a^h \sigma_y x_3 b\, dx_3 = b\sigma_y(h^2 - a^2)$$

   En normant par P_e et M_e, $P_r = -P_e a/h$; $M_r = 3M_e(1 - a^2/h^2)/2$, et on trouve le diagramme de la figure 4b :

$$M_r/M_e = (3/2)(1 - (P_r/P_e)^2)$$



(a) (b)

Figure 4 : (a) Profil de contrainte σ_{11} pour l'état de charge limite, en traction axiale et flexion pure, (b) illustration des domaines élastique et plastique dans l'espace P–M

6. *Evaluer la flèche au cours du chargement et la flèche résiduelle.*

   En supposant qu'une section plane reste plane, le champ de déplacement dans la poutre est de la forme :

   $u_1 = U(s) + \theta x_3$ $\quad U(s)$ désignant le déplacement d'ensemble de la section, θ son angle de rotation,

   $u_2 = V(s)$ $\quad V(s)$ désignant le déplacement vertical.

   S'il n'y a pas de cisaillement de type 12, la déformation correspondante doit être nulle. On trouve ainsi la relation qui permet de calculer la flèche en connaissant la rotation :

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0$$

$$\theta + V_{,1} = 0$$

   La déformation axiale se calcule aisément en fonction de la rotation, puisque :

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = \theta_{,1} x_3$$

Dans le cas d'un comportement élastique, le terme $\theta_{,1}$ s'exprime en fonction du moment appliqué, puisque :

$$M = \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} x_3 b\, dx_3 = EI\theta_{,1}$$

En présence de plasticité parfaite, la rotation continue d'être imposée par le noyau élastique : une section plane reste plane, et son orientation est donnée par la pente entre $-a$ et a. Dans cette zone :

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E = (\sigma_y/E)(x_3/a)$$

$$\theta_{,1} = \sigma_y/Ea$$

Il s'ensuit que la courbure $V_{,11}$ vaut :
– en régime élastique : $V_{,11} = -M/EI$
– en régime élastoplastique : $V_{,11} = -\sigma_y/Ea$
L'intégration de ces équations pour une poutre simplement posée sur ses deux extrémités, et de longueur $2L$ (soit $-L \leq x_1 \leq L$) donne pour expression du déplacement vertical :
– en régime élastique : $V = (M/2EI)(L^2 - x_1^2)$
– en régime élastoplastique : $V = (\sigma_y/2Ea)(L^2 - x_1^2)$
La valeur maximale de la flèche est obtenue pour $x_1 = 0$. En remplaçant a par son expression en fonction de M pendant le régime élastoplastique, on trouve l'expression de la réponse globale de la structure :

$$V = \frac{\sigma_y L^2}{2Eh\sqrt{3(1 - M/b\sigma_y h^2)}}$$

<u>Remarque :</u>

Cette expression est cohérente avec celle qui est écrite pour le cas élastique lorsque $M = M_e = (2/3)b\sigma_y h^2$
La flèche tend vers l'infini lorsque M tend vers $M_\infty = b\sigma_y h^2$. Dans ce dernier cas, il est clair que l'hypothèse de petites déformations sera en défaut bien avant la rupture, si bien qu'il faut en toute rigueur reconsidérer le calcul.
La flèche résiduelle est celle que l'on calcule en superposant au résultat précédent écrit pour le moment M_m celui obtenu lors d'une décharge élastique de $-M_m$, soit :

$$V = \frac{\sigma_y L^2}{2Eh\sqrt{3(1 - M_m/b\sigma_y h^2)}} - \frac{M_m L^2}{2EI}$$